S2 - Eksamen V09 . 20.05.09

Løsningsskisser

Litt foreløpige, si ifra hvis dere finner feil!

Del 1

Oppgave 1

a)

1) Produktregel: $f'(x) = 2x(x^2+1) + (x^2-1)2x = 2x^2 + 2x + 2x^3 - 2x = 4x^3$

2) Produktregel:

Og kjerneregel: $e^{2x} = e^u, u = 2x \Rightarrow (e^{2x})' = e^u 2 = 2e^{2x}$

$g'(x) = 2xe^{2x} + x^2 e^{2x} 2 = 2(x + x^2)e^{2x}$

b)

1) Aritmetisk: $a_1 = 2, d = 2$

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$a_{20} = 2 + 2(20-1) = 40$

$S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2}$

$S_{20} = (2+40)\frac{20}{2} = 420$

c)

1) $P = \frac{\text{gunstige}}{\text{mulige}}$ gir:

X :	-1	5	7
$P(X = x) = p(x)$:	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(Sjekk at summen av sannsynlighetene blir 1.)

2) $E(X) = \mu = \sum_{\text{alle } X} xp(x) = -1 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{2}{6} + 7 \cdot \frac{3}{6} = \frac{-1+10+21}{6} = 5$

$Var(X) = \sum_{\text{alle } X}(x-\mu)^2 p(x) = (-1-5)^2\frac{1}{6} + 0 + (7-5)^2\frac{3}{6} = \frac{36+12}{6} = 8$

d)

Kiloprisene som ukjente gir:

$2x + 3y + z = 81 \quad I$

$x + 2y + 3z = 71 \quad II$

$x + y + z = 37 \quad III$

$II - III: \quad y + 2z = 34 \quad IV$

$I - 2II: \quad -y - 5z = -61 \quad V$

$IV + V: \quad -3z = -27 \Leftrightarrow z = 9$

Innsattt i V: $\quad y = 61 - 5z = 61 - 5 \cdot 9 = 16$

Innsatt i III: $\quad x = 37 - y - z = 37 - 16 - 9 = 12$

Kiloprisene for epler, pærer og appelsiner er: $12, 16$ og 9 kroner/kg.

e) Nullpunktene sier oss at vi har formen:
$f(x) = k(x-(-1)(x-1)(x-3) = k(x+1)(x-1)(x-3)$

$y = 6$ når $x = 0$ gir oss: $6 = k(0+1)(0-1)(0-3) \Leftrightarrow$
$6 = 3k \Leftrightarrow k = 2$

): $f(x) = 2(x+1)(x-1)(x-3) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6$

Oppgave 2

$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

Her kan man faktorisere direkte:
$(x^3 - 4x) + (x^2 - 4) = x(x^2 - 4) + (x^2 - 4) = (x^2 - 4)(x+1) =$
$(x-2)(x+2)(x+1)$
Og vi har både nullpunkter (b) og at $x + 2$ er en faktor (a)

Standardmetode:
a)

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
x^3 & + & x^2 & - & 4x & - & 4 & = & (x+2) & \cdot(& x^2 & - & x & - & 2) \\
x^3 & + & 2x^2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & -x^2 & - & 4x & & & & & & & & & & \\
 & & -x^2 & - & 2x & & & & & & & & & & \\
 & & & & -2x & - & 4 & & & & & & & & \\
 & & & & -2x & - & 4 & & & & & & & & \\
 & & & & & & 0 & & & & & & & &
\end{array}$$

b)
Løser først: $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \lor x = 2$
): $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow$
$x = -2 \lor x = -1 \lor x = 2$

c)
$f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

$f'(x) = 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 4 = 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \lor x = -\frac{5}{3}$

): Stigningstallet/veksthastigheten til $f(x)$ er 1 når $x = 1$ eller $x = -\frac{5}{3}$.

d) $f''(x) = 6x + 2$
Vendepunkt når: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

Del 2

Oppgave 3

a) Setter vi opp en tabell ser vi:
$B_n = 20000 \cdot 1.06 + 20000 \cdot 1.06^2 + \ldots + 20000 \cdot 1.06^n$

Geometrisk rekke med $a_1 = 20000, k = 1.06$ og n:
Etter n-te beløp: $B_n = a_1 \frac{k^n-1}{k-1}$
Etter 4de beløp: $B_4 = 20000 \cdot \frac{1.06^4-1}{1.06-1} = 87492$ [Kr]

b) $B_n = 330000 \Leftrightarrow 20000 \cdot \frac{1.06^n-1}{1.06-1} = 330000 \Leftrightarrow$
$1.06^n = \frac{330000}{20000} \cdot (1.06-1)+1 = 1.99 \Leftrightarrow$
$\ln 1.06^n = \ln 1.99 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 1.99}{\ln 1.06} \approx 11.8$

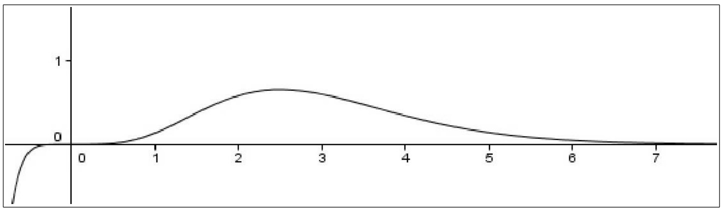
): Hun må spare i 12 år. (Passerer 330000 rett etter at 12 beløp er satt inn.)

c) $x \frac{1.06^{10}-1}{1.06-1} = 330000 \Leftrightarrow x = \frac{330000 \cdot (1.06-1)}{1.06^{10}-1} = 25036$ [Kr]

Oppgave 4 Alternativ I

$f(x) = x^5 e^{-2x}, \qquad D_f = \langle 0, 10 \rangle$

a)



b)
Produktregel: $f(x) = 5x^4 e^{-2x} + x^5 e^{-2x}(-2) = (5x^4 - 2x^5)e^{-2x}$

Ekstremalpunkter: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 2x^5 = 0 \Leftrightarrow 2x^4(\frac{5}{2} - x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5$
Av a) ser vi at dette gir topp-punktet:
$TP = (2.5, f(2.5)) = (2.5, 0.658)$
Ingen bunnpunkter.

c)
Produktregel igjen: $f''(x) = (20x^3 - 10x^4)e^{-2x} + (5x^4 - 2x^5)e^{-2x}(-2) =$
$2e^{-2x}(2x^5 - 5x^4) - e^{-2x}(10x^4 - 20x^3) = 4x^3 e^{-2x}(x^2 - 5x + 5)$

Veksthastigheten, $f'(x)$, er størst eller minst når: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow$
$4x^3 e^{-2x}(x^2 - 5x + 5) \Leftrightarrow x = 0$(Utenfor område)$\vee x^2 - 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow$
$x = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$
Av grafen ser vi at $x = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ svarer til maksimal veksthastighet, så
minimal veksthastighet er når $x = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \approx 3.62$

Dette skjer i vendpunktet: $VP = (\frac{5+\sqrt{5}}{2}, f(\frac{5+\sqrt{5}}{2})) \approx (3.62, 0.446)$

d)
Oppgaven er litt uklar på:

- Er stasjonen døgnåpen (00:00-24:00) eller ...?
- Er $x = 1$ midt på første dag eller slutten på første dag?

Jeg regner med at x er døgn etter åpningstid første dag.

$g(x) = 50f(x)$ har samme utseende, men y –verdiene blir 50 ganger større,
så salget er maksimalt når $x = 2.5$ (b), altså midt i åpningstiden tredje dag.

Salget øker mest når $x = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \approx 1.38$ (c), alstå litt før midten av åpningstiden andre dag.

Oppgave 4 Alternativ II

a) Grunnlinje: $AB = 6 - x$, Høyde: $AD = 12 - f(x) = 12 - \frac{8}{x}$

b) Areal=grunnlinje•høyde:
$$F(x) = AB \cdot AD = (6-x)(12 - \tfrac{8}{x}) = 80 - 12x - \tfrac{48}{x}$$

Restriksjoner:
Oppgave: $x > 0$
AB positiv: $x < 6$
AD positiv: $f(x) < 12 \Leftrightarrow \frac{8}{x} < 12 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$

): $D_F = \langle \frac{2}{3}, 6 \rangle$

c) $F(x) = 80 - 12x - 48x^{-1} \Rightarrow$
$$F'(x) = -12 - 48(-1)x^{-2} = \frac{48}{x^2} - 12 = \frac{48-12x^2}{x^2} = \frac{12(4-x^2)}{x^2}$$
Størst areal når: $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{12(4-x^2)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow$
$x = -2$(Utenfor D_F)$\vee x = 2$

Størst areal: $F(2) = 80 - 12 \cdot 2 - \frac{48}{2} = 32$

d) $O(x) = 2AB + 2AD = 2(6-x) + 2(12 - \frac{8}{x}) = 36 - 2x - \frac{16}{x} = 36 - 2x - 16x^{-1}$

$$O'(x) = -2 - 16(-1)x^{-2} = -2 + \frac{16}{x^2} = \frac{16-2x^2}{x^2} = \frac{2(8-x^2)}{x^2}$$

$O'(x) = 0 \Leftrightarrow 8 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{8} - x)(\sqrt{8} + x) = 0 \Leftrightarrow$
$x = -\sqrt{8}$ (Utenfor definisjonsmengde)$\vee x = \sqrt{8} \approx 2.83$

Størst omkrets når $x = 2.83$, altså ikke når arealet er størst ($x = 2$).

Oppgave 5

a)

n :	1	2	3	4	5	6
a_n :	1	3	6	10	15	21
S_n :	1	4	10	20	35	56

Pascals trekant er de binomiske koeffisientene vi bruker i sannsynlighetsregning:
$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\ldots1}$ (= n nCr r på lommeregner)

Best å sette på indekser i tabellen:

$n \backslash r$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Vi finner trekanttallene i kolonnen $r = 2$ og summene i kolonnen $r = 3$.
(Men, de finnes også som diagonaler fra starten av rad $n = 2$ og $n = 3$.)

b) Trekanttallene er summen av de naturlige tallene:

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

som er en aritmetisk rekke med $a_1 = 1, d = 1$ og n ledd.

$$S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2} \text{ gir:}$$

$$a_n = (1+n)\frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

c) Lommeregner: sum(seq(N*(N+1)/2,N,1,50))=22100

GeoGebra: Sum[Følge[n*(n+1)/2,n,1,50]]=22100

d) $a_n : \binom{2}{2}, \binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \ldots$ ut fra tabellen i a)

Vi ser at det øverste tallet i den binomiske koeffisienten er en større enn indeksen,
så vi har at: $a_n = \binom{n+1}{2}$

Dette stemmer med b) da $\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2\cdot 1} = \frac{(n+1)n}{2}$!

Tilsvarende er $S_n : \binom{3}{3}, \binom{4}{3}, \binom{5}{3}, \ldots$

Altså er $S_n = \binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)(n+2-1)(n+2-2)}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$

Sjekk: $S_{50} = \frac{(50+2)(50+1)50}{6} = 22\,100$ (Som stemmer med c) !)

Oppgave 6

Hmm...Mange oppgaver dette året, vi satser på at det blir litt mindre å gjøre våren 2010 :-\

Nullhypotese: $H_0 : p = 4.3\% = 0.043$ (Resultatet er uendret, bare tilfeldig variasjon.)

Velger: Signifikansnivå: $\alpha = 0.05$

Vi regner ut sannsynligheten for å få så "ekstremt" resultat som i stikkprøven, med

nullhypotesen
som forutsetning:

$$P(X \geq 29) = \sum_{x=29}^{500} \binom{500}{x} 0.043^x (1-0.043)^{500-x} = 1 - \text{binomcdf}(500{,}0.043{,}28) = 0.0662$$

Sannsynligheten for å få 29 eller flere 6-ere er over signifikansnivået, og ikke liten nok til at vi kan se bort fra at dette resultatet er tilfeldig.

Konklusjon:
Med signifikansnivå 0.05, gir ikke stikkprøven grunnlag for å forkaste nullhypotesen; det gode resultatet i stikkprøven kan skyldes tilfeldig variasjon og vi har ikke grunnlag for å si at det skyldes omlegging av undervisningsmetoder.