

Matematikk

R1



Odd Heir

Gunnar Erstad

Ørnulf Borgan

Håvard Moe

Per Arne Skrede

BOKMÅL

Matematikk R1 dekker målene i læreplanen av 2006 for Matematikk R1 i studiespesialiserende utdanningsprogram.

© H. Aschehoug & Co. (W. Nygaard) 2007

1. utgave / 1. opplag 2007

Det må ikke kopieres fra denne boka i strid med åndsverkloven eller i strid med avtaler om kopiering inngått med *Kopinor*, interesseorgan for rettighetshavere til åndsverk. Kopiering i strid med lov eller avtale kan føre til erstatningsansvar og inndragning, og kan straffes med bøter eller fengsel.

Redaktører: Dag-Erik Møller og Knut Barder

Grafisk formgivning og omslag: Mona Dahl og Marit Heggenhougen

Bearbeiding av omslagsfoto: Grafisk Form/Kathinka Kvalstad Eckhoff

Ombrekning: Type-it AS

Bilervedaktør: Annette Faltin

Tekniske illustrasjoner: Framnes Tekst og Bilde AS

Grunnskrift: Sabon 10,8/13

Papir: 100 g Tom&Otto 0,82

Trykk og innbinding: AIT Trykk Otta AS

ISBN 978-82-03-33609-6

www.aschehoug.no

Bildeliste, se side 424

Guide til Matematikk R1

Aktivitet i starten
av hvert kapittel:

AKTIVITET: Brett og tenk

Ta et vanlig A4-ark og brett det slik at du får en nøyaktig likesidet trekant. Lengden av sidene skal være lik kortsiden av arket.

Hvilke geometrikunnskaper brukte du i bretteprosessen?

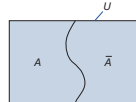
Læringsmål i margen ved
starten av hvert underkapittel:

2.5 BEVISTYPER

I 2.5 skal du lære å
gjennomføre bevis.

Da Ole møtte Lise etter å ha vært oppe til førerprøven, ville hun vite hvordan det hadde gått.
«Det er feil å si at jeg ikke sto,» var svaret.
«Gratulerer,» sa Lise.

Teori:



Komplementære hendelser

La A være en hendelse ved et forsøk.
Hendelsen $\bar{A}$ omfatter alle utfall som *ikke* er med i A .
Hendelsene A og $\bar{A}$ er *komplementære*.
Den komplementære hendelsen til $A = \{5, 6\}$ ved kast med én terning er $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Eksempler:

Eksempel 4 Fart og akselerasjon for en scooter

Ved en fartstest av en scooter ble farten fortløpende registrert. Det viste seg at etter t sekunder var farten $v(t)$ m/s tilnærmet gitt ved

$$v(t) = -0,1t^3 + 1,4t^2 + 0,5t, \quad 0 < t < 4$$

Vi vil finne fart og akselerasjon etter 3 sekunder.



Innlæringsoppgaver, med
henvisninger til oppgave-
samlingen bak i boka:

Sti 1 Sti 2 Sti 3
Stifinner: side 319

Oppgave 3.15

Du kaster fem terninger.

- Hva er sannsynligheten for at du får fem seksere?
- Hva er sannsynligheten for at alle terningene viser det samme?

Oppgavesamling bak i boka,
med tre forslag til stier:

1.3 Parallelle vektorer

Sti 1	Sti 2	Sti 3
117, 119, 121, 122▲	118, 120, 121, 122▲, 124▲	121, 123▲, 124▲, 125▲, 126▲

117 Skriv $\vec{u}$ uttrykt ved $\vec{v}$ når

- $\vec{u}$ er dobbelt så lang som $\vec{v}$ og vektorene har samme retning

Nettstedet:



Forord

Matematikk R1

Læreverket *Matematikk R1* er skrevet for læreplanen Matematikk R1 (matematikk for realfag) på studiespesialiserende utdanningsprogram. Utdrag fra læreplanen finner du på side 390.

Læreverket består av

- *Læreboka*, alt-i-ett, med teori, eksempler, innlæringsoppgaver og oppgavesamling.
- *Nettstedet*, på Lokus.no, med bl.a. interaktive oppgaver, animasjoner og graftegner.

Læreboka

Hvert kapittel innledes med en kort aktivitet som kan gi deg en idé om hva kapitlet inneholder. Aktivitetene egner seg godt for samtale.

I hvert underkapittel finner du teori, eksempler og innlæringsoppgaver. Innlæringsoppgavene er plassert løpende i teksten, slik at du hele tiden kan kontrollere om du har forstått lærestoffet. Det lønner seg å regne alle innlæringsoppgavene. Du kan så gå til oppgavesamlingen bak i boka for videre arbeid og utdypning.

I slutten av hvert kapittel finner du en kapitteltest og et sammendrag. Her kan du kontrollere om du har forstått helheten i kapitlet. Sammendragene inneholder bl.a. norsk-engelske ordlister med ti sentrale begreper fra kapitlet.

Du finner løsninger til innlæringsoppgavene og kapitteltestene på nettstedet.

Underveis har vi plassert bilder som kan utdype teksten og knytte stoffet til samfunn og kultur. Vi oppfordrer til aktiv bruk av bildene.

Oppgavesamlingen bak i læreboka

I oppgavesamlingen finner du varierte oppgaver av mange forskjellige typer og vanskelighetsgrader.

Du finner blandede oppgaver i slutten av hvert kapittel. Dessuten testen «15 rette eller gale» og eksamensoppgaver. Eksamensoppgavene er merket med X.

- ▲ Oppgavene innenfor et underkapittel er ordnet etter vanskelighetsgrad. De letteste er ikke markert. De noe vanskeligere er markert med trekanter: ▲ eller ▲▲.
- ▲▲ De blandede oppgavene har ikke markeringer for vanskelighetsgrad.
- * Noen oppgaver fra oppgavesamlingen har løsninger på nettstedet. Disse oppgavene er merket med stjerne *.

Til hjelp i arbeidet har vi laget *Stifinneren*, en tabell med tre forskjellige forslag til «stier». En sti er et utvalg av oppgaver satt i en passende rekkefølge. Sti 1 er lettest. Sti 3 er vanskeligst.

Nettstedet

Nettstedet har samme kapittelinnndeling som læreboka. Til hvert kapittel har vi laget *interaktive oppgaver* av mange typer. Her får du vite med en gang om du har svart riktig, og ofte kan du velge å se hint og løsningsforslag.

Vi har også laget *animasjoner*, *graftegner*, *regneark*, *matematikkleksikon*, *lenkesamling*, *lenkeoppgaver* og *opplæringskurs i bruk av digitale verktøy*. Nettstedet vil være i stadig utvikling.

Digitale verktøy

Der det har vært aktuelt å forklare bruken av lommeregner, har vi forklart inntastingen for Casio CFX-9850/fx-9860-seriene og Texas TI-83/TI-84-seriene.

I noen oppgaver blir du bedt om å bruke digitalt verktøy. Disse oppgavene kan vanligvis løses både på lommeregner og ved å bruke andre digitale verktøy.

I læreplanen står det at elevene skal kunne bruke dynamisk konstruksjonsprogram. I noen av eksemplene viser vi slik bruk. Skjermbildene er laget med programmet GeoGebra (www.geogebra.org), men andre verktøy kan like gjerne brukes.

Det vil i en del tilfeller være aktuelt å bruke regneark i arbeidet med matematikk. Derfor har vi tatt med eksempler på slik bruk. Forklaringene er tilpasset Microsoft Excel og regnearket i OpenOffice.

Du kan bruke registeret for å finne hvor i boka bruk av digitale verktøy er forklart. Se stikkordene *digitalt verktøy*, *dynamisk konstruksjonsprogram*, *Lokus.no*, *lommeregner*, *regneark* og *symbolbehandlende verktøy*.

Vi viser også til nettstedet, der du finner opplæringskurs i bruk av digitale verktøy.

Takk

Vi takker konsulentene Jostein Walle, Petter Callin, Åse Alvær Pedersen og Terrence Baine for gode forslag og innspill. En spesiell takk til redaktørene Dag-Erik Møller og Knut Barder og teknisk redaktør Fred W. Alvad.

Lykke til

I årenes løp har vi fått mange nyttige tilbakemeldinger fra elever og lærere. Ønsker du å gi kommentarer, kan du bruke adressen matematikkR1@aschehoug.no.

Vi ønsker deg lykke til med bruken av læreverket!

Hilsen

Odd Heir, Gunnar Erstad, Ørnulf Borgan, Håvard Moe og Per Arne Skrede

Innhold



1 Vektorer

- 1.1 Hva er en vektor? 9
 - 1.2 Addisjon og subtraksjon av vektorer 12
 - 1.3 Parallelle vektorer 20
 - 1.4 Vektorkoordinater 28
 - 1.5 Lengden av vektorer 34
 - 1.6 Skalarprodukt 38
 - 1.7 Skalarprodukt og geometriske problemer 51
- Kapitteltest. Sammendrag 56



2 Algebra

- 2.1 Faktorisering 59
 - 2.2 Polynomdivisjon 65
 - 2.3 Likninger. Implikasjon. Ekvivalens 70
 - 2.4 Ulikheter 78
 - 2.5 Bevistyper 85
 - 2.6 Potenser og logaritmer 90
 - 2.7 Logaritmesetningene 97
 - 2.8 Logaritmelikninger 102
 - 2.9 Eksponential- og logaritmeulikheter 107
- Kapitteltest. Sammendrag 110



3 Sannsynlighet

- 3.1 Tilbakeblikk 113
 - 3.2 Betinget sannsynlighet og uavhengige hendelser 118
 - 3.3 Produktsetningen 124
 - 3.4 Total sannsynlighet og Bayes' setning 127
 - 3.5 Kombinatorikk 133
 - 3.6 Ordnet utvalg med og uten tilbakelegging 135
 - 3.7 Uordnet utvalg uten tilbakelegging 142
 - 3.8 Hypergeometriske og binomiske sannsynligheter 147
 - 3.9 Mer kombinatorikk 152
- Kapitteltest. Sammendrag 154



4 Funksjoner 1

- 4.1 Rasjonale funksjoner 157
- 4.2 Grenseverdier og kontinuitet 163
- 4.3 Derivasjon 168
- 4.4 Drøfting av funksjoner 180
- 4.5 Den andrederiverte 186
- Kapitteltest. Sammendrag 196



5 Funksjoner 2

- 5.1 Funksjoner med e som grunntall 199
- 5.2 Derivasjon av e - og $\ln$ -funksjoner 206
- 5.3 Parameterframstilling 215
- 5.4 Vektorfunksjoner 224
- 5.5 Derivasjon av vektorfunksjoner 228
- Kapitteltest. Sammendrag 234



6 Geometri

- 6.1 Geometriske steder 237
- 6.2 Formlikhet og kongruens 247
- 6.3 Konstruksjoner 251
- 6.4 Mer om trekanter 262
- 6.5 Å bevise pytagorassetningen 271
- Kapitteltest. Sammendrag 278

Oppgavesamling 280

Utdrag fra læreplanen i Matematikk R1 390

Fasit – Innlæringsoppgaver og kapitteltester 392

Fasit – Oppgavesamling 403

Register 421

1 | Vektorer



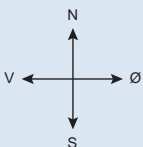
AKTIVITET: Labyrint

Lars og Laila har forvillet seg inn i en labyrint, der alle stier er rettet nord-sør eller øst-vest. De forsøker å finne en vei ut.

Lars og Laila starter fra samme utgangspunkt (origo).

Lars går 2 m mot øst, 3 m sør, 1 m vest, 2 m sør, 4 m øst, 6 m nord, 1 m vest og 2 m nord.

Laila går 1 m mot nord, 2 m vest, 2 m sør, 3 m vest, 5 m nord og 2 m øst.



Hvor langt øst for, og hvor langt nord for utgangspunktet er Lars?

Hvor langt øst for, og hvor langt nord for utgangspunktet er Laila?

Tegn inn forflytningene til Lars og Laila i et koordinatsystem. La 1 cm svare til 1 m.

Hvor langt fra utgangspunktet er Lars og Laila?

Hvilken posisjon har Lars i forhold til Laila?

Hvor langt fra hverandre er Lars og Laila?

1.1

HVA ER EN VEKTOR?

I 1.1 skal du lære å bruke vektorer til å illustrere størrelser med retning.

Når meteorologen skal presentere værmeldingen, bruker han eller hun piler på værkartet for å beskrive vindforholdene. Ved pilene står det gjerne et tall som viser vindstyrken. En fullverdig oversikt krever både *vindretning* og *vindstyrke*.

Slik er det også med mange andre fysiske størrelser; de har både en retning og en tallverdi.

For å kunne foreta matematiske beregninger på fysiske størrelser der retningen inngår som en del av størrelsen, trenger vi et nytt matematisk begrep, som vi kaller *vektorer*.

Vektorer

En vektor er et linjestykke med retning.

Fysiske størrelser som vi må beskrive med vektorer, kaller vi *vektorstørrelser*.

Kraft og fart er eksempler på vektorstørrelser.

Vanlige tall og størrelser som ikke har retning, kaller vi *skalarer*. Tid og masse er eksempler på skalarer.



Vind er en vektorstørrelse.

Oppgave 1.1

I hvilke tilfeller vil en vektor beskrive situasjonen best?

- a Volumet av melk i en melkekartong.
- b Tiden du bruker på å gjøre matematikkleksene.
- c Farten rallybilen har idet den kjører ut i en sving.
- d Vanntemperaturen i badekaret.
- e Du flytter på en pult i klasserommet.
- f Du går fra hytte til hytte i Jotunheimen.
- g Jordas fart i forhold til sola akkurat nå.

Vektorer i planet

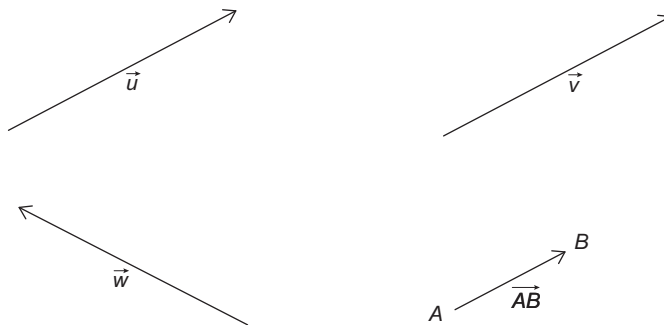
Vi tegner en vektor ved å tegne et rett linjestykke med en pilspiss i den ene enden. Da har vi definert en entydig retning for vektoren. Og vi har gitt den en bestemt lengde.



Nedenfor har vi tegnet fire vektorer som vi har satt navn på. (Det er vanlig å bruke u , v og w eller a , b og c .) For å vise at vi har en vektor, setter vi en pil over navnet, som $\vec{u}$. Pila over navnet peker alltid mot høyre.

En vektor som går fra et punkt A til et punkt B , skriver vi $\overrightarrow{AB}$.

Vi leser $\vec{u}$ som « u -vektor» og $\overrightarrow{AB}$ som « AB -vektor».



Er noen av de fire vektorene like?

Tre av vektorene ovenfor har samme retning. Og tre av vektorene har samme lengde. Men bare $\vec{u}$ og $\vec{v}$ har både samme retning og samme lengde. Vi sier da at $\vec{u}$ er lik $\vec{v}$.

Like vektorer

To vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er like når de har samme retning og samme lengde. Da kan vi skrive $\vec{u} = \vec{v}$.

Det at to vektorer regnes som samme vektor når de er ensrettet og har samme lengde, er viktig når vi skal addere vektorer.

NB! ▶ Det spiller ingen rolle *hvor* vi tegner en vektor. Om vi flytter en vektor, regner vi den som samme vektor, bare vi passer på at retningen og lengden ikke blir endret.

For å slippe å skrive «lengden av vektoren $\vec{v}$ » innfører vi skrivemåten $|\vec{v}|$. Lengden $|\vec{v}|$ er et ikke-negativt tall (dvs. et positivt tall eller null).

Vi kan for eksempel skrive $|\vec{v}| = 5$ dersom vektoren $\vec{v}$ er 5 enheter lang, men det gir *ikke* mening å skrive $\vec{v} = 5$. $|\vec{v}|$ kaller vi også *absoluttverdien* av $\vec{v}$.

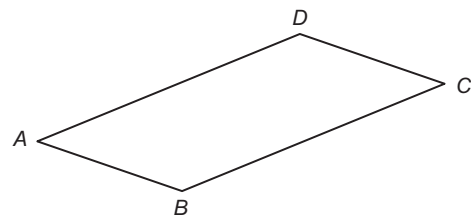
Eksempel 1 Vektorer i et parallelogram

Firkanten $ABCD$ er et parallelogram.
(I et parallelogram er to og to sider parallelle og like lange.)

Her er $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ og $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{CD}$ er *ikke* like. De har samme lengde, men motsatte retninger.

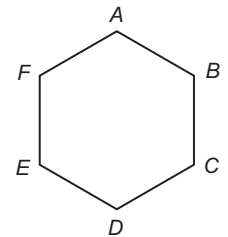
Men vi kan skrive $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$, for lengdene er like.



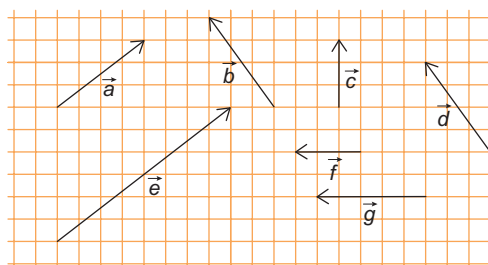
Oppgave 1.2

Figuren viser en regulær sekskant. Alle sidene i sekskanten er altså like lange, og to og to sider er parallelle.

- Finn en vektor som er lik $\overrightarrow{AB}$.
- Finn en vektor som er lik $\overrightarrow{CB}$.
- Finn en vektor som er lik $\overrightarrow{CA}$.
- Hvilke vektorer er like lange som $\overrightarrow{BE}$?



Oppgave 1.3



- Hvilke vektorer har samme retning?
- Hvilke vektorer er like lange?
- Hvilke vektorer er like?

Sti 1

Sti 2

Sti 3

Stifinner: side 281

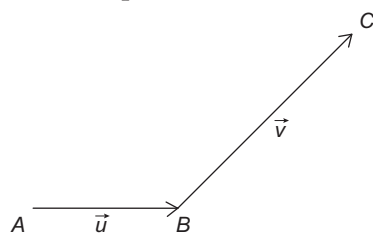
1.2

ADDISJON OG SUBTRAKSJON AV VEKTORER

I 1.3 skal du lære å påvise parallelle vektorer, og bruke parallelle vektorer til å løse problemer.

Summen av to vektorer

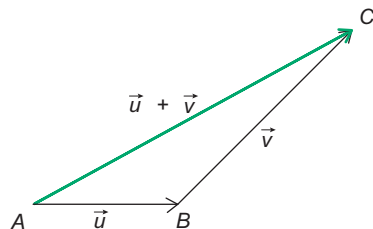
Når vi skal addere vektorer, kan det være til hjelp å tenke seg at vektorene beskriver en sammensatt forflytning fra et gitt utgangspunkt. Vi lar vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ representere to forflytninger ut fra et punkt A .



Vi starter i punktet A og forflytter oss vektoren $\vec{u}$. Da kommer vi til et punkt som vi kaller B . Så forflytter vi oss $\vec{v}$ videre fra B og kommer til et punkt C .

Hvilken vektor er det da som beskriver vår endelige posisjon i forhold til startpunktet A ?

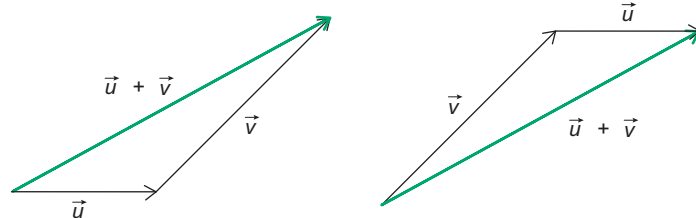
Jo, det er vektoren som starter i A og slutter i C , dvs. $\overrightarrow{AC}$.



Addisjon av to vektorer

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Trekantmetoden for å addere to vektorer

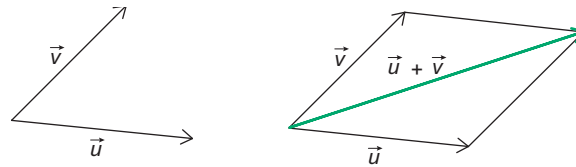


Når vi skal tegne summen av to gitte vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ med trekantmetoden, tegner vi *enten* $\vec{v}$ ut fra det punktet der $\vec{u}$ slutter, *eller* $\vec{u}$ ut fra det punktet der $\vec{v}$ slutter. De to vektorene danner da to sider i en trekant. Summen av de to vektorene går langs den tredje siden i trekanten.

Summen starter der den første vektoren starter, og slutter der den andre vektoren slutter.

Parallellogrammetoden for addisjon av to vektorer

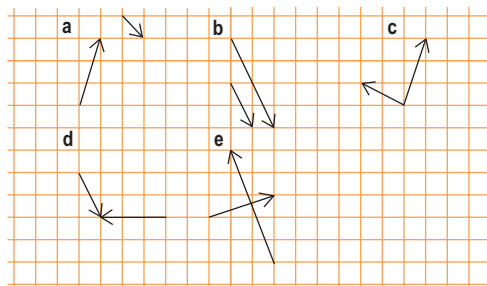
Vi tegner de to vektorene ut fra samme punkt. Så parallellforskyver vi hver av dem slik at vi får et parallellogram.



Diagonalen fra hjørnet der de to vektorene starter, til hjørnet der de slutter, er lik vektorsummen $\vec{u} + \vec{v}$.

Oppgave 1.4

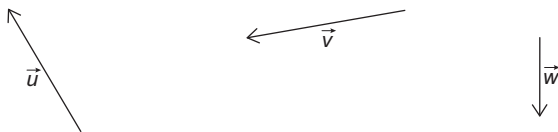
Tegn summen av vektorene.



Eksemplet nedenfor viser hvordan vi går fram hvis vi skal addere flere enn to vektorer.

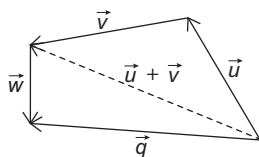
Eksempel 1 Addisjon av tre vektorer

Vi skal tegne vektorsummen $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.



Når vi skal addere tre vektorer, finner vi først summen av to av vektorene. Deretter adderer vi den tredje til summen av de to. På figuren har vi først funnet summen $\vec{u} + \vec{v}$.

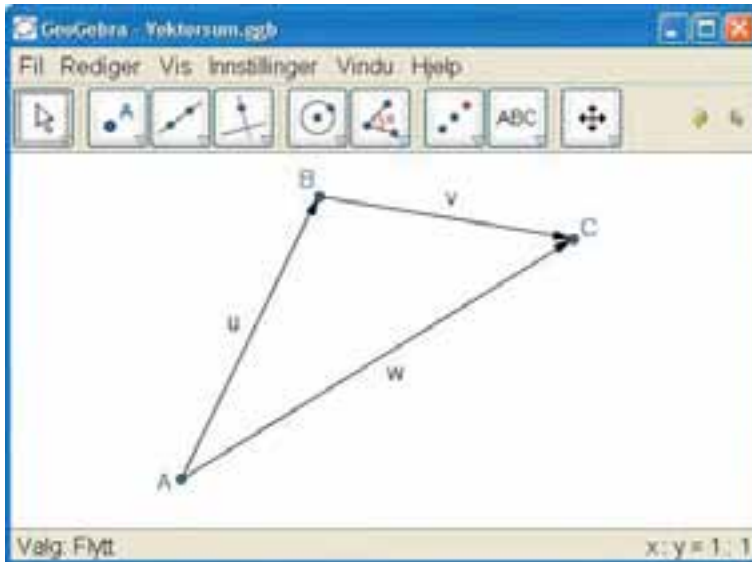
Vi har kalt vektorsummen $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ for $\vec{q}$.



Eksempel 2 Vektorer i dynamiske konstruksjonsprogrammer

Figuren nedenfor er laget i det dynamiske konstruksjonsprogrammet GeoGebra og viser vektorsummen $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$.

Vektorene følger med når man drar i punktene A , B og C .



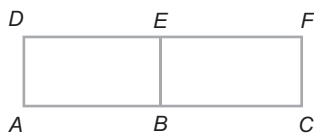
Programmer for dynamisk geometri kan være til hjelp i vektorregning, både for oppgaveløsning og for å forstå problemstillinger og begreper.

I oppgavesamlingen finner du noen oppgaver der det legges opp til bruk av slike programmer, og på nettstedet på Lokus.no finner du vektoranimasjoner.

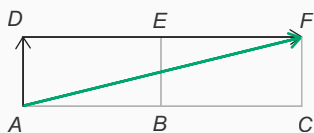
GeoGebra kan du laste ned fra www.geogebra.org.

Eksempel 3 Flere vektorsummer

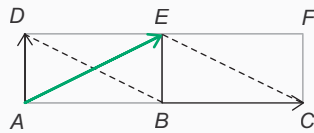
Figuren viser to like rektangler.



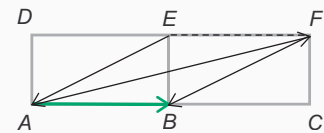
Vi vil finne vektorsummene $\vec{AD} + \vec{DF}$, $\vec{AD} + \vec{BC}$ og $\vec{AF} + \vec{EA}$.



$$\vec{AD} + \vec{DF} = \vec{AF}$$



$$\vec{AD} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DE} = \vec{AE}$$



$$\vec{AF} + \vec{EA} = \vec{AF} + \vec{FB} = \vec{AB}$$

Eksempel 4 Parallelogram

Om firkanten $ABCD$ får vi vite at sidene AD og BC er parallelle og like lange.

Vi vil bruke vektorregning til å bevise at da må firkanten være et parallelogram.

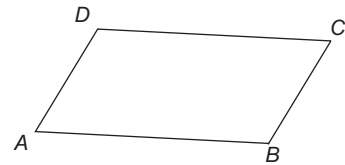
Fordi AD og BC er parallelle og like lange, kan vi sette

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

Hvis de to andre sidene også er like lange og parallelle, er firkanten et parallelogram. Det er altså nok å vise at $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

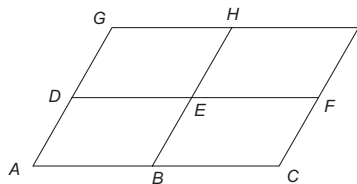
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC}$$

Sidene AB og DC er altså like lange og parallelle, og firkanten er et parallelogram.



Oppgave 1.5

Figuren viser fire like parallelogrammer. Skriv vektorsummene enklere.



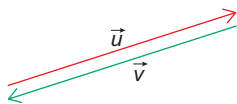
- | | | | |
|---|---|---|---|
| a | $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ | b | $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GH}$ |
| c | $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{IF}$ | d | $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AC}$ |

Oppgave 1.6

- a Tegn to vilkårlige vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$. Vis at $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- b Tegn tre vilkårlige vektorer $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$. Vis at $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

Eksempel 5 Nullvektoren

Vi skal addere to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$.



Vektorene er like lange, og de er motsatt rettet. Vi kan derfor skrive $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ og $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$. Summen blir da $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$.

$\overrightarrow{AA}$ er en vektor som starter og slutter i samme punkt, og som derfor har lengden 0. Denne vektoren kaller vi *nullvektoren*, og den skriver vi $\vec{0}$.

Vi får altså $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.

Tall og vektorer – en sammenlikning

Før vi går videre med flere regneoperasjoner for vektorer, skal vi peke på noen likheter og forskjeller mellom tallregning og vektorregning.

Regneoperasjonen vektoraddisjon er definert slik at «vektorenes orden» er likegyldig: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Vi kan også velge hvilke vektorer vi vil addere først når vi adderer flere vektorer: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

Tilsvarende regler bruker vi når vi adderer tall.

Når vi adderer to tall og får null, vet vi at de to tallene har motsatt fortegn. $a + b = 0$ gir $a = -b$.

I eksempel 5 så vi at $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$. Det kan vi bruke til å definere hva det skal bety å sette et minustegn foran en vektor:

$$\vec{AB} = -\vec{BA}.$$

For tallene a og b er det ene positivt og det andre negativt. Det kan vi derimot *ikke* si om vektorene $\vec{AB}$ og $\vec{BA}$. Vektorer er ikke positive eller negative. En vektor er et linjestykke med retning, og ingen retning har noen forrang foran andre retninger. Vektorene $\vec{AB}$ og $-\vec{AB}$ kaller vi *motsatte* vektorer.

For et tall a vet vi at $3a$ betyr $a + a + a$. Da er det rimelig å definere $3\vec{v}$ til å bety $\vec{v} + \vec{v} + \vec{v}$. En slik definisjon gjør at mange av de regnereglene vi bruker for tallregning, også vil gjelde for vektorregning.

En sentral egenskap ved tall er at de kan rangeres. For to ulike tall c og d er enten $c < d$ eller $d < c$. Denne egenskapen har ikke vektorer. Å skrive « $\vec{u} < \vec{v}$ » har *ikke* mening. To vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er enten like, $\vec{u} = \vec{v}$, eller forskjellige, $\vec{u} \neq \vec{v}$.

(Lengdene av vektorer kan vi selvsagt rangere, de er jo vanlige tall.)

Vi skal seinere i kapitlet definere subtraksjon av vektorer og en spesiell form for multiplikasjon av to vektorer. Vi kan derimot *ikke* dividere med en vektor, og heller ikke ta kvadratroten av en vektor.

Motsatte vektorer

Vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ i eksempel 5 er motsatte vektorer, og vi kan skrive $\vec{u} = -\vec{v}$.

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} \quad \text{og} \quad (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$$

Vektorene $\vec{v}$ og $-\vec{v}$ er altså vektorer som er like lange og motsatt rettet.

Vektorene $\vec{AB}$ og $\vec{BA}$ er motsatte vektorer, og vi kan skrive $\vec{AB} = -\vec{BA}$.

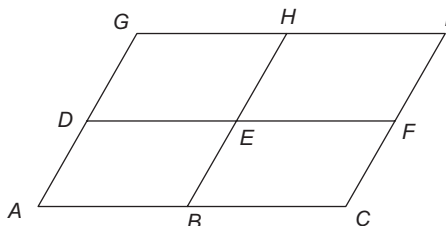
Motsatte vektorer

$\vec{v}$ og $-\vec{v}$ er motsatte vektorer. De er like lange og motsatt rettet.

$\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BA}$ er motsatte vektorer. Vi kan skrive $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Oppgave 1.7

Figuren viser fire like parallellogrammer.



Finn en motsatt vektor til

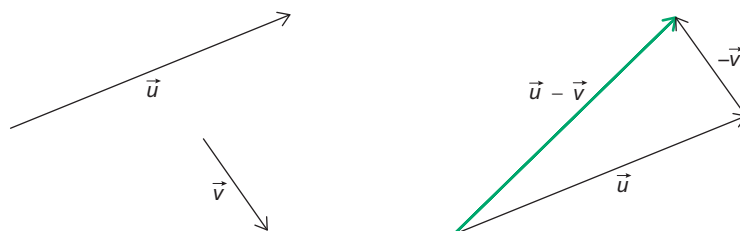
- a $\overrightarrow{AB}$ b $\overrightarrow{BI}$ c $\overrightarrow{GC}$

Differansen mellom vektorer

Differansen mellom to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ kan vi alltid skrive som en sum: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

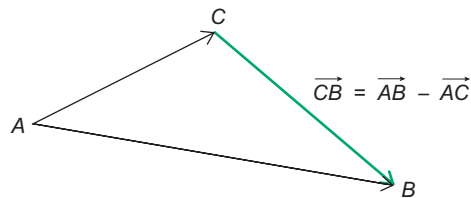
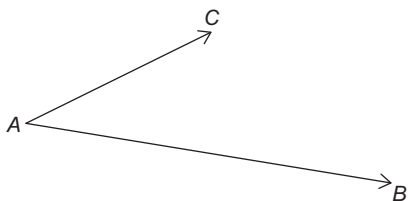
I stedet for å subtrahere vektoren $\vec{v}$ kan vi addere den motsatte vektoren $-\vec{v}$.

På figuren nedenfor bruker vi trekantmetoden til å addere vektorene $\vec{u}$ og $-\vec{v}$ for å finne $\vec{u} - \vec{v}$.



Når vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er tegnet fra samme startpunkt, kan vi finne $\vec{u} - \vec{v}$ uten å måtte flytte på en av vektorene. Se figuren nedenfor til venstre. For å forsikre deg om at retningen på $\vec{u} - \vec{v}$ blir riktig, kan det være lurt å tenke på differansen $\vec{u} - \vec{v}$ som summen $-\vec{v} + \vec{u}$.



Eksempel 6 Subtraksjon av vektor

Vi skal finne et enklere uttrykk for vektordifferansen $\vec{AB} - \vec{AC}$, og tegne vektoren.

$$\vec{AB} - \vec{AC} = -\vec{AC} + \vec{AB} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$$

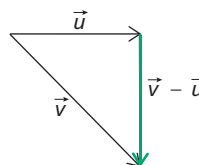
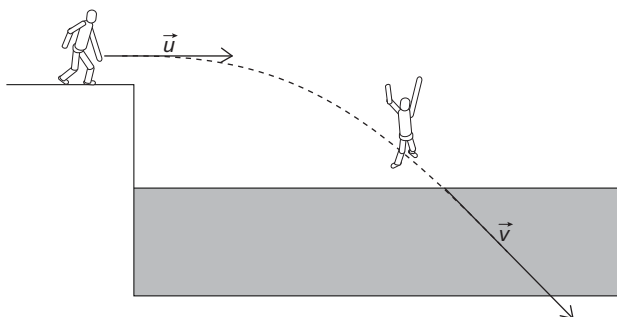
Eksempel 7 Fartsending

Kristoffer tar fart for å løpe utfor bassengkanten. Han går først med farten 4,0 m/s. Så øker han farten til 10 m/s. *Fartsendingen* er da 6,0 m/s.

Fart er en *vektorstørrelse*. Foruten verdi og enhet må vi også kjenne retningen for at farten skal være fullstendig gitt. (Når vi ikke er interessert i fartsretningen, sier vi gjerne banefart.)

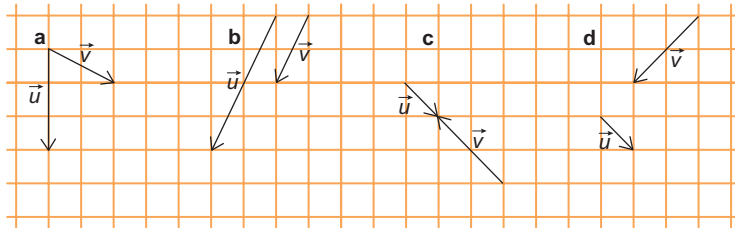
Fordi Kristoffer holdt konstant fartsretning under tilløpet, kunne vi regne ut fartsendingen ved enkel subtraksjon. Når fartsretningen ikke er konstant, må vi bruke vektorer (hvis det ikke er banefarten vi er interessert i).

Vi lar vektoren $\vec{u}$ være farten til Kristoffer idet han når bassengkanten, og vektoren $\vec{v}$ være farten idet han lander i bassenget. Vi vil finne fartsendingen til Kristoffer i løpet av svevet.

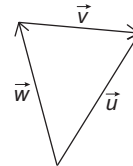
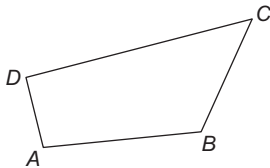


Generelt finner vi endringen av en størrelse ved å ta sluttverdien minus startverdien. Det gjelder også når vi regner med vektorer.

Fartsendingen, som er en vektor, kan vi skrive som $\vec{v} - \vec{u}$. Fartsendingen til Kristoffer under svevet har retning loddrett nedover.

Oppgave 1.8Tegn vektordifferansen $\vec{u} - \vec{v}$.**Oppgave 1.9**

Uttrykk hver av vektorene ved de to andre vektorene.

**Eksempel 8 Forenkling av vektoruttrykk**Vi vil skrive uttrykket $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BD}$ enklere.Vi får bruk for addisjonsregelen $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ fra side 12. I tillegg er det ofte lurt å gjøre om fra subtraksjon til addisjon, for eksempel ved å erstatte $-\overrightarrow{CB}$ med $+\overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned}
 &\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BD} \\
 &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BD} \\
 &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BD} \\
 &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \\
 &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} \\
 &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{BC} \\
 &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\
 &= \overrightarrow{AC}
 \end{aligned}$$

Oppgave 1.10

Skriv vektoruttrykkene enklere.

a $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}$

b $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}$

c $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BD}$

d $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CD}$

Sti 1

Sti 2

Sti 3

Stifinner: side 282

1.3

PARALLELLE VEKTORER

I 1.3 skal du lære å påvise parallelle vektorer, og bruke parallelle vektorer til å løse problemer.

I forrige underkapittel så du hvordan vi adderer og subtraherer vektorer. Vi antydte også hvordan vi definerer multiplikasjon av en vektor med en *skalar*, det vil si et vanlig tall.

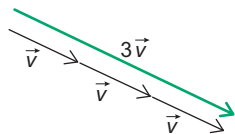
Før vi gir en generell definisjon på multiplikasjon med en skalar, ser vi på et eksempel der vi tar utgangspunkt i vektoraddisjon.

Eksempel 1 Multiplikasjon med skalar

Vi skal tegne vektoren $3\vec{v}$.



I tråd med definisjonen antydte på side 16 skriver vi $3\vec{v} = \vec{v} + \vec{v} + \vec{v}$.



Vektoren $3\vec{v}$ er altså en vektor som har samme retning som $\vec{v}$ og er 3 ganger så lang.

Når vi multipliserer en vektor $\vec{v}$ med et positivt tall k , får vi en vektor som har samme retning som $\vec{v}$, og som er k ganger så lang. Hvis $k > 1$, blir $k\vec{v}$ lengre enn $\vec{v}$. Hvis $0 < k < 1$, blir $k\vec{v}$ kortere enn $\vec{v}$.

Men hva hvis k er negativ?

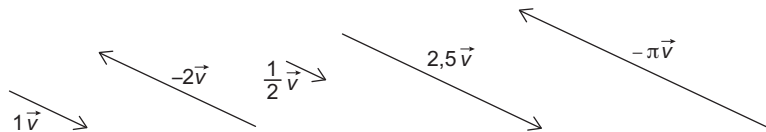
Vektoren $-2\vec{v}$ kan vi skrive $2 \cdot (-\vec{v})$.

$-\vec{v}$ er den motsatte vektoren til $\vec{v}$.

$-2\vec{v}$ er en vektor som har motsatt retning av $\vec{v}$ og er dobbelt så lang som $\vec{v}$.

For negative verdier av k har altså $\vec{v}$ og $k\vec{v}$ motsatte retninger.

Figuren viser $k\vec{v}$ for noen k -verdier.



Hva kan du si om alle disse vektorene?

Absoluttverdien av et tall k
 $|k| = k$ hvis k
er positiv eller null.
 $|k| = -k$ hvis k
er negativ.
 $|-3| = |3| = 3$

Vektorene $-2\vec{v}$ og $2\vec{v}$ har begge lengden $2|\vec{v}|$.

- Hvis k er positiv, kan vi skrive lengden av $k\vec{v}$ som $k|\vec{v}|$.
- Hvis k er negativ, kan vi skrive lengden av $k\vec{v}$ som $|k| \cdot |\vec{v}|$.

$|k|$ står for absoluttverdien av tallet k . (Se marg.)

Parallelle vektorer

For alle verdier av k er $k\vec{v}$ og $\vec{v}$ parallelle vektorer.

Hvis $k > 0$, har $k\vec{v}$ og $\vec{v}$ samme retning.

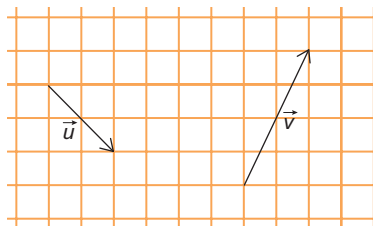
Hvis $k < 0$, har $k\vec{v}$ og $\vec{v}$ motsatt retning.

Hvis $k = 0$, er $k\vec{v} = \vec{0}$ (nullvektoren).

Lengden av $k\vec{v}$: $|k\vec{v}| = |k| \cdot |\vec{v}|$

Vi sier at nullvektoren er parallell med enhver vektor. Da får vi ikke noe unntak for $k = 0$.

Oppgave 1.11



Tegn vektorene.

a $2\vec{u}$

b $3,5\vec{u}$

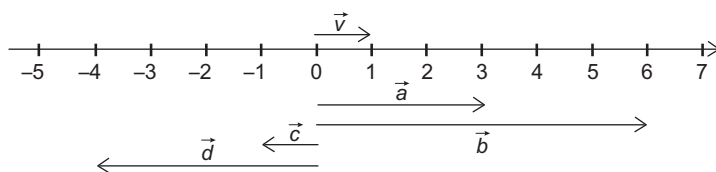
c $-\vec{u}$

d $-\frac{1}{2}\vec{u}$

e $\vec{v} + 3\vec{u}$

f $\frac{1}{2}\vec{v} - 2\vec{u}$

Oppgave 1.12



Uttrykk vektorene ved $\vec{v}$.

Når to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle, skriver vi gjerne $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Hvis $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$, er $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

To vektorer er parallelle hvis det fins et tall k som gjør at vi kan skrive den ene vektoren som k multiplisert med den andre vektoren.

Når vi har funnet en verdi k som gjør at $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$, kan vi altså slå fast at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle vektorer.

Setningen gjelder også den andre veien. Når to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle, har vi at $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$. (Forutsatt at $\vec{v}$ ikke er nullvektor.)

Hvis $\vec{u} \parallel \vec{v}$, er $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$.



Parallelle vektorer kan vi trekke sammen, slik som her:

$$\begin{array}{c} \vec{v} \longrightarrow 2,5\vec{v} \longrightarrow \\ \hline \longrightarrow 3,5\vec{v} \longrightarrow \end{array}$$

$$\vec{v} + 2,5\vec{v} = 3,5\vec{v}$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow 4\vec{v} \longrightarrow \\ \hline \begin{array}{c} \longleftarrow 0,5\vec{v} \longleftarrow \\ \longrightarrow -3,5\vec{v} \longrightarrow \end{array} \end{array}$$

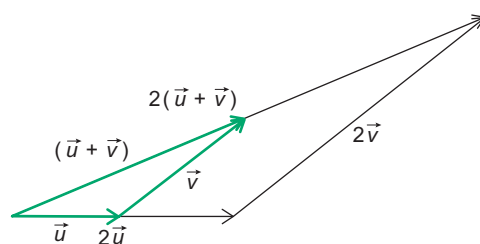
$$4\vec{v} - 3,5\vec{v} = 0,5\vec{v}$$

I vektoruttrykk som inneholder ikke-parallelle vektorer, trekker vi sammen de som *er* parallelle:

$$3\vec{u} + \vec{v} - \vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$$

Noen ganger kan vi faktorisere vektoruttrykket.

$$2\vec{u} + 2\vec{v} = 2(\vec{u} + \vec{v})$$



Generelt har vi disse regnereglene når a og b er tall:

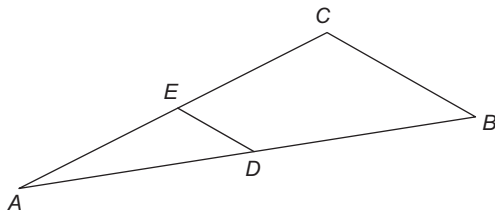
$$a\vec{v} + b\vec{v} = (a + b)\vec{v}$$

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$

$$a \cdot (b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$$

Eksempel 2 Parallelle sider

Figuren viser en vilkårlig trekant ABC der D og E er midtpunktene på AB og AC .



Vi vil bruke vektorregning til å vise at DE er parallell med BC .

Vi må da vise at det fins et tall k slik at $\overrightarrow{DE} = k \cdot \overrightarrow{BC}$.

Først finner vi et uttrykk for $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

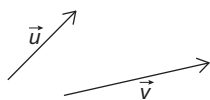
Så finner vi et uttrykk for $\overrightarrow{DE}$.

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Fordi $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, må sidene DE og BC være parallelle.

Eksempel 3 Vektorregning og parallelle vektorer

$\vec{u}$ og $\vec{v}$ er to vektorer som ikke er parallelle.



Vi vil undersøke om vektorene $2(\vec{u} + \vec{v}) + 2\vec{v}$ og $2(\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u}$ er parallelle.

Vi forenkler de to uttrykkene.

$$2(\vec{u} + \vec{v}) + 2\vec{v} = 2\vec{u} + 2\vec{v} + 2\vec{v} = 2\vec{u} + 4\vec{v}$$

$$2(\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u} = 2\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{u} = \vec{u} + 2\vec{v}$$

Vi ser at $2\vec{u} + 4\vec{v} = 2(\vec{u} + 2\vec{v})$.

Det viser at $2(\vec{u} + \vec{v}) + 2\vec{v} = 2 \cdot (2(\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u})$, og vektorene må være parallelle.

Oppgave 1.13

Trekk sammen vektoruttrykkene.

a $3\vec{u} + 2\vec{u} - \vec{v} + 4\vec{v}$

b $4(\vec{u} - 2\vec{v}) - 2\vec{u} + \vec{v}$

c $-2(\vec{v} - 3\vec{u}) - 5\vec{u}$

Oppgave 1.14

Undersøk om noen av vektorene er parallelle.

$$\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{b} = 3\vec{u} + 3\vec{v}, \quad \vec{c} = \vec{u} - \vec{v}, \quad \vec{d} = \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}$$

Like vektorer

Vi ser på vektorlikningen

$$3\vec{u} + a\vec{v} = b\vec{u} - \vec{v}$$

Vi ser at $b = 3$ og $a = -1$ er en løsning. Da er tallet foran $\vec{u}$ det samme på hver side av likhetstegnet, og tallet foran $\vec{v}$ er det samme på hver side.

Men er dette den eneste løsningen?

Hvis vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ *ikke* er parallelle, er svaret ja!

Vi vil vise det generelt for vektorlikningen $a\vec{u} + b\vec{v} = c\vec{u} + d\vec{v}$.

Vi skal altså vise at vi da må ha $a = c$ og $b = d$.

Vi samler leddene med $\vec{u}$ på venstre side, og leddene med $\vec{v}$ på høyre side. Det gir

$$a\vec{u} - c\vec{u} = d\vec{v} - b\vec{v}$$

$$(a - c)\vec{u} = (d - b)\vec{v}$$

Vektoren på venstre side er parallell med $\vec{u}$, mens vektoren på høyre side er parallell med $\vec{v}$. Men $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er *ikke* parallelle.

Da kan vektorene være like bare hvis begge har lengden null!

Altså må vi ha $a - c = 0$ og $d - b = 0$. Det vil si at $a = c$ og $b = d$.

Like vektorer

Vi lar $\vec{u}$ og $\vec{v}$ være to ikke-parallelle vektorer.

Da er $a\vec{u} + b\vec{v} = c\vec{u} + d\vec{v}$ hvis $a = c$ og $b = d$, men ellers ikke.

Oppgave 1.15

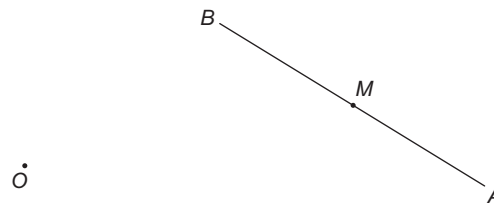
Bestem k og m i vektorlikningen.

a $3\vec{u} + 2\vec{v} = k\vec{u} + (m - 1)\vec{v}$

b $k\vec{u} + 2m\vec{v} = m\vec{u} + 4\vec{v}$

Midtpunktet på et linjestykke

På figuren ser du linjestykket AB og et punkt O .

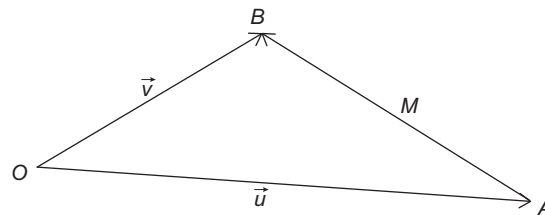


Midtpunktet på AB kaller vi M . Vi skal vise et resultat for vektoren $\overrightarrow{OM}$ som vi får bruk for seinere.

Vi setter $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ og $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Så finner vi $\overrightarrow{OM}$ uttrykt ved $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Først uttrykker vi $\overrightarrow{AB}$ ved $\vec{u}$ og $\vec{v}$:

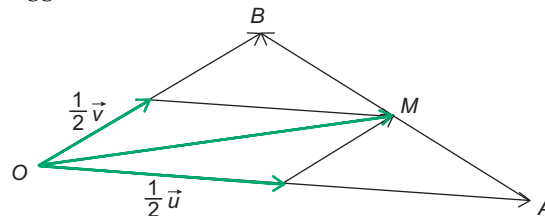
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\vec{u} + \vec{v}$$



Så finner vi $\overrightarrow{OM}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \vec{u} + \frac{1}{2}(-\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} \\ &= \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\end{aligned}$$

Hvis vi starter fra punktet O og går $\frac{1}{2}\vec{u}$, og deretter $\frac{1}{2}\vec{v}$, havner vi altså midt mellom A og B . Dette gjelder uansett hvor startpunktet O ligger!



Vektoruttrykket for $\overrightarrow{OM}$ kan vi også utlede ved å velge to «ulike veier» fra O til M :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}\end{aligned}$$

Vi adderer og får

$$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$$

$\overrightarrow{AM}$ og $\overrightarrow{BM}$ er motsatte vektorer, og summen av dem er derfor $\vec{0}$.

Da står vi igjen med $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$$

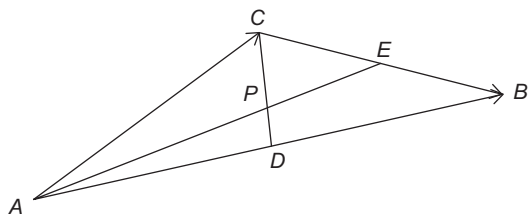
Mange vektorproblemer blir løst ved å «gå to ulike veier» fra punkt til punkt, slik vi gjorde nederst på forrige side. Setter vi de to vektoruttrykkene lik hverandre, får vi gjerne en vektorlikning vi kan bruke til å finne ukjente størrelser. Det skal vi se i eksemplet nedenfor.

Oppgave 1.16

Tegn en vilkårlig firkant $ABCD$. Kall midtpunktene på sidene for E , F , G og H . Bruk vektorregning til å vise at firkanten $EFGH$ er et parallelogram.

Eksempel 4 Medianene i en trekant

En *median* i en trekant er et linjestykke fra et hjørne til midtpunktet på motstående side. I trekanten ABC er D og E midtpunktene på AB og BC . P er skjæringspunktet mellom medianene AE og CD .



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \vec{u} \\ \overrightarrow{AC} &= \vec{v}\end{aligned}$$

Vi skal vise at P deler linjestykkene AE og CD slik at den lengste delen er dobbelt så lang som den korteste. Det vil si at $AP = 2PE$ og $CP = 2PD$.

For å forenkle regningen kaller vi $\overrightarrow{AB}$ for $\vec{u}$ og $\overrightarrow{AC}$ for $\vec{v}$.

Fordi $\overrightarrow{AP}$ er parallell med $\overrightarrow{AE}$, kan vi sette $\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AE}$.

Det samme gjelder for $\overrightarrow{CP}$ og $\overrightarrow{CD}$. Altså kan vi sette $\overrightarrow{CP} = m \cdot \overrightarrow{CD}$.

Ved å sette opp en vektorlikning skal vi bestemme verdiene til k og m .

I vektorlikningen skriver vi vektoren $\overrightarrow{AP}$ på to måter, uttrykt ved $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Først går vi direkte fra A til P .

$$\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AE}$$

Her får vi bruk for «midtpunktresultatet» fra forrige side. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$.

$$\overrightarrow{AP} = k \cdot \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}k \cdot \vec{u} + \frac{1}{2}k \cdot \vec{v} \quad \textcircled{1}$$

Så går vi fra A til P via C .

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AC} + m \cdot \overrightarrow{CD}$$

Også her får vi bruk for «midtpunktresultatet». $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$.

Vi uttrykker $\overrightarrow{CA}$ og $\overrightarrow{CB}$ ved $\vec{u}$ og $\vec{v}$: $\overrightarrow{CA} = -\vec{v}$ og $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -\vec{v} + \vec{u}$.

Det gir $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(-\vec{v} + (-\vec{v} + \vec{u})) = \frac{1}{2}(-2\vec{v} + \vec{u}) = -\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u}$.

Tilbake til $\overrightarrow{AP}$:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + m \cdot \overrightarrow{CD} = \vec{v} + m \cdot (-\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u}) = \vec{v} - m\vec{v} + \frac{1}{2}m\vec{u}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}m \cdot \vec{u} + (1 - m) \cdot \vec{v} \quad (2)$$

Nå har vi to uttrykk, (1) og (2), for den samme vektoren, og uttrykkene må være like.

$$\frac{1}{2}k \cdot \vec{u} + \frac{1}{2}k \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}m \cdot \vec{u} + (1 - m) \cdot \vec{v}$$

Skal vektorene på venstre og høyre side være like, må faktoren foran $\vec{u}$ være den samme på begge sider. Det samme gjelder faktoren foran $\vec{v}$. Vi løser likningssettet:

$$\frac{1}{2}k = \frac{1}{2}m \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}k = 1 - m \quad (4)$$

Av (3) får vi $k = m$.

Det setter vi inn for m i (4):

$$\frac{1}{2}k = 1 - m$$

$$\frac{1}{2}k = 1 - k$$

$$k = 2 - 2k$$

$$3k = 2$$

$$k = \frac{2}{3}$$

Vi får løsningen $m = k = \frac{2}{3}$.

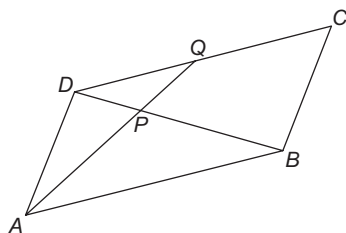
Dette viser at $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ og $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.

Da må vi også ha $PE = \frac{1}{3}AE$ og $PD = \frac{1}{3}CD$.

Dermed har vi vist at AP er dobbelt så lang som PE , og at CP er dobbelt så lang som PD .

(Dette resultatet viser vi også på side 266 i kapittel 6, da uten vektorregning.)

Oppgave 1.17



Figuren viser parallelogrammet $ABCD$. Q er midtpunktet på CD , og P er skjæringspunktet mellom AQ og BD .

Sett $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ og $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$.

- Finn $\overrightarrow{BD}$ og $\overrightarrow{AQ}$ uttrykt ved $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
- Bruk resultatene fra oppgave a til å finne to vektoruttrykk for $\overrightarrow{AP}$.
- Vis at $AP = 2PQ$.

Sti 1

Sti 2

Sti 3

Stifinner: side 284

1.4

VEKTORKOORDINATER

I 1.4 skal du lære å regne med vektorer på koordinatform.

Vektorkoordinater

Ved regning med vektorer har vi ofte behov for å kunne beskrive retning og lengde for en vektor ved hjelp av tall.

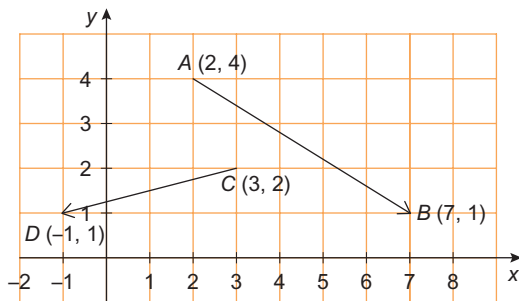
Det kan gjøres på flere måter, for eksempel ved å oppgi hvor lang en vektor er, og hvilken retning den har i forhold til himmelretningene.

Eksempel:

En vektor $\vec{v}$ er summen av en fire meter lang vektor i østlig retning og en tre meter lang vektor i nordlig retning. Regn ut hvor lang vektoren er, og hvor stor vinkel den danner med øst-retningen!

En mer praktisk metode er å plassere vektorene i et vanlig rettvinklet koordinatsystem, et koordinatsystem med x -akse og y -akse, der alle punkter har to koordinater, én x -koordinat og én y -koordinat.

Det viser seg også at når vi plasserer vektorer i et koordinatsystem og bruker begreper hentet fra funksjonslæren, får vi mange nye og viktige anvendelser av vektorregningen.

Eksempel 1 Vektorer i koordinatsystem

Tenk deg at du skulle beskrive de to vektorene på figuren i en telefonsamtale, slik at vedkommende kunne tegne samme figur som den du har, men uten å nevne koordinatene til de fire punktene. Hva ville du si?

Kanskje ville du si:

Du får vektoren $\overline{AB}$ ved å gå 5 hakk rett til høyre og deretter 3 hakk rett ned.

Du får vektoren $\overline{CD}$ ved å gå 4 hakk rett til venstre og deretter ett hakk rett ned.

Og da er vektorene klart beskrevet, og vedkommende kan tegne de samme vektorene.

Men hva med *beliggenheten* til vektorene?

Du blir kanskje overrasket av spørsmålet. Du har jo lært at to vektorer er like hvis de er parallelle og like lange. Så om du lot startpunktet være $A(5, 5)$ i stedet for $A(2, 4)$, så ville det være samme vektor. Det stemmer fortsatt. Men for mye av det vi bruker vektorregningen til når vi benytter et koordinatsystem, kan også plasseringen være viktig.

Oppgave 1.18

Tegn en vektor som går

- a 4 hakk rett til høyre og 2 hakk rett opp.
- b 1 hakk rett til høyre og 3 hakk rett ned.
- c 5 hakk rett til venstre og 1 hakk rett ned.

De «umatematiske» betegnelsene «hakk ned», «hakk til høyre» og «hakk til venstre» i eksempel 1 blir ikke brukt i praksis. I stedet for antall hakk i en bestemt retning snakker vi om *enhetsvektorer*. Som navnet antyder har en enhetsvektor lengden én, dvs. 1 lengdeenhet.

En enhetsvektor som peker rett mot høyre, skriver vi $\vec{e}_x$ (e for enhet og indeksen x for retning.)

Og da ser du hva $\vec{e}_y$ betyr.

$-\vec{e}_x$ og $-\vec{e}_y$ peker da henholdsvis mot venstre og nedover.

Enhetsvektorene kan tegnes hvor som helst i koordinatsystemet, men vanligvis tegner vi dem ut fra origo.

Når vi lar enhetsvektoren $\vec{e}_x$ starte i origo, ender den i punktet $(1, 0)$ på x -aksen. Enhetsvektoren $\vec{e}_y$ kan tilsvarende starte i origo og ende i punktet $(0, 1)$ på y -aksen.

Vektoren $\overrightarrow{AB}$ i eksempel 1 er summen av 5 $\vec{e}_x$ -vektorer og -3 $\vec{e}_y$ -vektorer. Vi kan derfor skrive

$$\overrightarrow{AB} = 5\vec{e}_x - 3\vec{e}_y \quad (1)$$

Fordi vi har «standard rekkefølge» ($\vec{e}_x$ først, og så $\vec{e}_y$) når vi omtaler vektorer i et koordinatsystem, kan vi tillate oss å skrive

$$\overrightarrow{AB} = [5, -3] \quad (2)$$

som altså betyr $\overrightarrow{AB} = 5\vec{e}_x - 3\vec{e}_y$.

Vanligvis skriver vi (2) i stedet for (1). Det er derfor lett å glemme hva (2) egentlig betyr. Men det kan straffe seg. For av og til *må* du huske at (2) betyr (1) for å kunne løse et problem.

Når vi har gitt enhetsvektorene $\vec{e}_x$ i x -retning og $\vec{e}_y$ i y -retning, kan vi uttrykke alle vektorer ved hjelp av disse to.

En vektor $\vec{v} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y$ er entydig bestemt av verdiene til a og b , og vi skriver altså bare tallene a og b , i hakeparenteser:

Skrivemåte: Vektorkoordinater

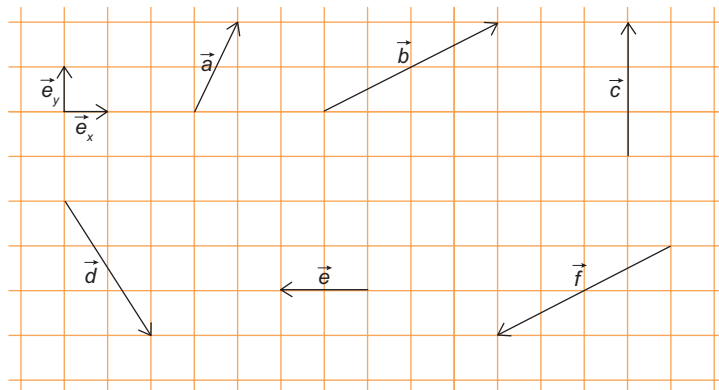
$$[a, b] = a \cdot \vec{e}_x + b \cdot \vec{e}_y$$

Skrivemåten $[a, b]$ for en vektor minner om skrivemåten for et punkt, (a, b) . Det er derfor svært viktig at vi bruker hakeparenteser når vi mener vektoren $a\vec{e}_x + b\vec{e}_y$.

NB! ►

$(5, 2)$ er et punkt. $[5, 2]$ er en vektor.

Oppgave 1.19

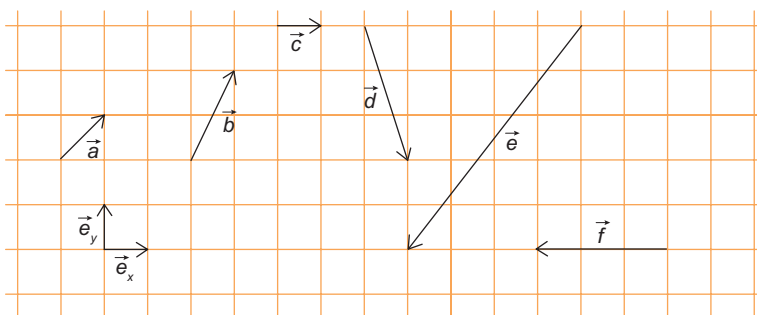


Uttrykk vektorene ved $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$.



«Komposisjon», 1930,
av Vasilij Kandinskij

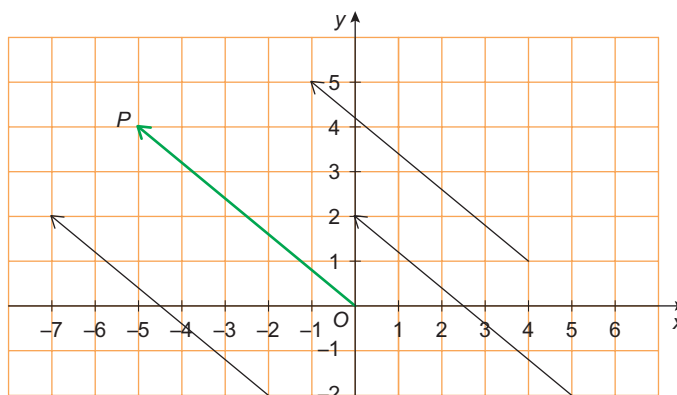
Oppgave 1.20



Skriv vektorene med vektorkoordinater, dvs. på formen $[a, b]$.

Posisjonsvektor

På figuren nedenfor har vi tegnet vektoren $-5 \cdot \vec{e}_x + 4 \cdot \vec{e}_y$ flere steder i et koordinatsystem.



Vektoren som er tegnet med start i origo, går til punktet $P(-5, 4)$. Denne vektoren, $\overrightarrow{OP}$, har en litt spesiell status. Den viser posisjonen til punktet P i forhold til origo. $\overrightarrow{OP} = -5 \cdot \vec{e}_x + 4 \cdot \vec{e}_y$ viser at P ligger 5 enheter til venstre for origo og 4 enheter over origo.

En vektor som går fra origo til et punkt P , kaller vi *posisjonsvektoren* til P .

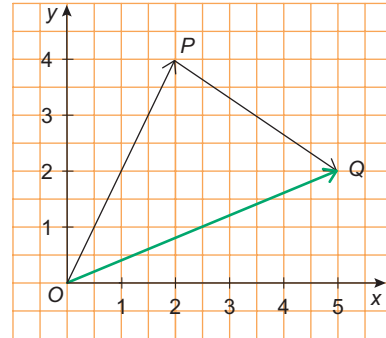
Hva er posisjonsvektoren til punktet $A(2, 3)$?

Eksempel 2 Posisjonsvektor

Vi skal finne koordinatene til punktet Q når vi får oppgitt vektorene $\overrightarrow{OP} = 2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y$ og $\overrightarrow{PQ} = 3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = (2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) + (3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y) \\ &= 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 2\vec{e}_y \\ &= 5\vec{e}_x + 2\vec{e}_y\end{aligned}$$

Fordi $\overrightarrow{OQ} = 5\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$, har punktet Q koordinatene $(5, 2)$.

**Posisjonsvektor**

Vektoren fra origo O til punktet $P(a, b)$ er gitt ved $\overrightarrow{OP} = [a, b]$.

Oppgave 1.21

Finn koordinatene til punktet Q når $P = (-3, 1)$ og $\overrightarrow{QP} = [-2, 4]$.

Regning med vektorkoordinater

Parallelle vektorer kan vi trekke sammen, slik som her:

$$4\vec{e}_x + \vec{e}_x - 2\vec{e}_x = 3\vec{e}_x$$

$$4 \cdot 2\vec{e}_y - 3 \cdot 5\vec{e}_y = 8\vec{e}_y - 15\vec{e}_y = -7\vec{e}_y$$

Når vi regner med vektorkoordinater, kan vi derfor trekke sammen alle førstekoordinatene. De representerer parallelle vektorer. Tilsvarende kan vi trekke sammen alle andrekoordinatene.

Det gir disse regnereglene:

Regneregler for vektorer gitt ved vektorkoordinater

Vi har to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$.

$$\vec{u} + \vec{v} = [x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$$

$$\vec{u} - \vec{v} = [x_1, y_1] - [x_2, y_2] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2]$$

$$k \cdot [x, y] = [kx, ky]$$

Eksempel 3 Addisjon med vektorkoordinater

Vi skal finne vektorsummen $\vec{u} + \vec{v}$ når $\vec{u} = [4, -1]$ og $\vec{v} = [-2, 2]$.

Her ser du utregningen med vektorkoordinater og med enhetsvektorene $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$:

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= [4, -1] + [-2, 2] \\ &= [4 - 2, -1 + 2] \\ &= [2, 1]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= (4\vec{e}_x - \vec{e}_y) + (-2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \\ &= 4\vec{e}_x - 2\vec{e}_x - \vec{e}_y + 2\vec{e}_y \\ &= 2\vec{e}_x + \vec{e}_y\end{aligned}$$

Eksempel 4 Regning med vektorkoordinater

Vi skal finne vektoren $3\vec{u} + 4\vec{v} - 2\vec{w}$ når $\vec{u} = [4, -1]$, $\vec{v} = [-2, 2]$ og $\vec{w} = [3, 0]$.

$$\begin{aligned}3\vec{u} + 4\vec{v} - 2\vec{w} &= 3 \cdot [4, -1] + 4 \cdot [-2, 2] - 2 \cdot [3, 0] \\ &= [12, -3] + [-8, 8] - [6, 0] \\ &= [12 - 8 - 6, -3 + 8 - 0] \\ &= [-2, 5]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3\vec{u} + 4\vec{v} - 2\vec{w} &= 3 \cdot (4\vec{e}_x - \vec{e}_y) + 4 \cdot (-2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) - 2 \cdot (3\vec{e}_x + 0\vec{e}_y) \\ &= 12\vec{e}_x - 3\vec{e}_y - 8\vec{e}_x + 8\vec{e}_y - 6\vec{e}_x \\ &= 12\vec{e}_x - 8\vec{e}_x - 6\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 8\vec{e}_y \\ &= -2\vec{e}_x + 5\vec{e}_y\end{aligned}$$

Oppgave 1.22

Vi har gitt tre vektorer $\vec{u} = [3, 2]$, $\vec{v} = [-1, 4]$ og $\vec{w} = [0, 5]$.
Regn ut koordinatene til

a $\vec{u} + \vec{v}$ b $4\vec{u}$ c $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$ d $2\vec{u} - 3\vec{v} + 4\vec{w}$

Eksempel 5 Vektor mellom to punkter

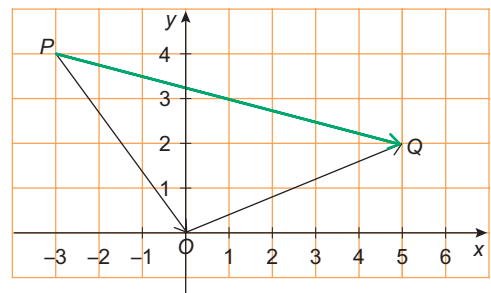
Vi skal bestemme vektoren $\overrightarrow{PQ}$ når $P = (-3, 4)$ og $Q = (5, 2)$.

Når vi kjenner koordinatene til punktene P og Q , kjenner vi også posisjonsvektorene til de to punktene:

$$\overrightarrow{OP} = [-3, 4] \quad \text{og} \quad \overrightarrow{OQ} = [5, 2]$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= [5, 2] - [-3, 4] = [5 + 3, 2 - 4] = [8, -2]\end{aligned}$$

NB! Det samme resultatet får vi med «rutetelling». For å komme fra P til Q må vi gå 8 enheter i x -retning og 2 enheter i negativ y -retning.



Vektoren fra punktet $P(x_1, y_1)$ til punktet $Q(x_2, y_2)$ er gitt ved $\overrightarrow{PQ} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$.

Eksempel 6 Vektorer mellom to punkter

Det er gitt to punkter $A = (3, -4)$ og $B = (5, 1)$.

$$\overrightarrow{AB} = [5 - 3, 1 - (-4)] = [2, 5]$$

$$\overrightarrow{BA} = [3 - 5, -4 - 1] = [-2, -5]$$

Tegn inn punktene A og B i et koordinatsystem og se om du får samme resultat ved «rutetelling».

Sti 1

Sti 2

Sti 3

Stifinner: side 286

Oppgave 1.23

Bestem vektorene når punktene P , Q og R har koordinatene $P = (1, 2)$, $Q = (3, 5)$ og $R = (-2, 4)$.

a $\overrightarrow{PQ}$ b $\overrightarrow{QR}$ c $\overrightarrow{RP}$

1.5 LENGDEN AV VEKTORER

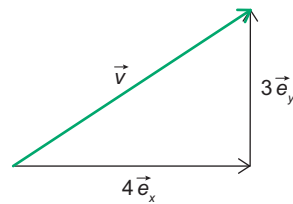
I 1.5 skal du lære å bestemme lengden av vektorer og avgjøre om vektorer gitt på koordinatform er parallelle.

Lengden av vektorer på komponentform

Når en vektor er gitt på formen $\vec{v} = [a, b]$, kalles $a\vec{e}_x$ og $b\vec{e}_y$ *komponentene* til vektoren $\vec{v}$.

Vi sier derfor at $\vec{v}$ er gitt på *komponentform*.

Nedenfor ser du vektoren $\vec{v} = [4, 3]$.

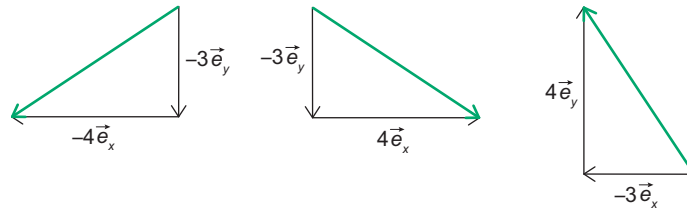


Når $\vec{v} = 4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$, utgjør de tre vektorene $\vec{v}$, $4\vec{e}_x$ og $3\vec{e}_y$ sider i en rettvisklet trekant der $\vec{v}$ danner hypotenusen.

Katetene er 4 og 3 enheter.

Lengden av $\vec{v}$ blir altså

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$



Hva blir lengden av de tre grønne vektorene ovenfor?

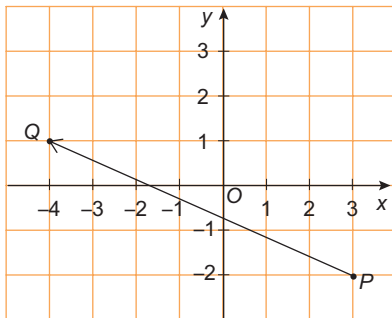
Lengden av en vektor

Lengden av $\vec{v} = [x, y]$ er

$$|\vec{v}| = |[x, y]| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Eksempel 1 Lengden av en vektor – avstanden mellom to punkter

Vi vil regne ut avstanden mellom punktene $P = (3, -2)$ og $Q = (-4, 1)$.



Avstanden mellom P og Q er lik lengden av vektoren $\overrightarrow{PQ}$.

Vi starter derfor med å finne $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [-4, 1] - [3, -2] = [-4 - 3, 1 - (-2)] = [-7, 3]$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-7)^2 + 3^2} = \sqrt{58} \approx 7,6$$

Avstanden mellom P og Q er altså 7,6.

Oppgave 1.24

Finn lengden av vektorene.

a $[6, 8]$ b $[-1, 5]$ c $[-12, 5]$

Resultatet i eksempel 1 kan vi generalisere:

Avstanden mellom to punkter

Avstanden mellom $P = (x_1, y_1)$ og $Q = (x_2, y_2)$ er

$$|\overrightarrow{PQ}| = |[x_2 - x_1, y_2 - y_1]| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Eksempel 2 Avstanden mellom to punkter

Vi vil finne avstanden mellom punktene $A = (2, -5)$ og $B = (4, -2)$.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(4-2)^2 + (-2-(-5))^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \approx 3,61$$

Oppgave 1.25

Bestem avstanden mellom punktene P og Q når

- a $P = (2, 4)$ og $Q = (5, 8)$
- b $P = (-4, 3)$ og $Q = (2, -1)$
- c $P = (-13, -22)$ og $Q = (-53, -31)$

Parallelle vektorer på koordinatform

I underkapittel 1.3 så vi at to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle hvis det fins et tall k slik at $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$.

Kan du avgjøre om vektorene $[3, 4]$ og $[6, 8]$ er parallelle?

Vi ser at $[6, 8] = 2 \cdot [3, 4]$. Det viser at vektorene er parallelle.

Fordi $k = 2$ er positiv, har vektorene også samme retning. Vektoren $[6, 8]$ er dobbelt så lang som vektoren $[3, 4]$.

To vektorer $[a, b]$ og $[c, d]$ er like hvis $a = b$ og $c = d$, og ellers ikke.



Parallelle vektorer?

Eksempel 3 Parallele vektorer

Vi vil avgjøre om noen av vektorene $\vec{u} = [5, -9]$, $\vec{v} = [-20, 36]$ og $\vec{w} = [2, -4]$ er parallelle.

$$\begin{aligned}\vec{v} &= k \cdot \vec{u} \\ [-20, 36] &= k \cdot [5, -9] \\ [-20, 36] &= [5k, -9k] \\ -20 &= 5k \quad \text{og} \quad 36 = -9k \\ k &= -4 \quad \text{og} \quad k = -4\end{aligned}$$

Vi kan altså skrive $\vec{v} = -4\vec{u}$. Vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er derfor parallelle.

$$\begin{aligned}\vec{v} &= t \cdot \vec{w} \\ [-20, 36] &= t \cdot [2, -4] \\ -20 &= 2t \quad \text{og} \quad 36 = -4t \\ t &= -10 \quad \text{og} \quad t = -9\end{aligned}$$

Førstekoordinatene er like for $t = -10$. Men da er ikke andrekoordinatene like.

$\vec{v}$ og $\vec{w}$ er altså ikke parallelle.

Når $\vec{u}$ er parallell med $\vec{v}$, og $\vec{w}$ ikke er parallell med $\vec{v}$, så er heller ikke $\vec{u}$ og $\vec{w}$ parallelle.

Oppgave 1.26

Avgjør om vektorene er parallelle.

- a $\vec{u} = [1, 4]$ og $\vec{v} = [2, 8]$
- b $\vec{u} = [-4, 4]$ og $\vec{v} = [1, -1]$
- c $\vec{u} = [12, 8]$ og $\vec{v} = [20, 16]$

Eksempel 4 Å finne en vektor som er parallell med en gitt vektor

Vi skal bestemme tallet a slik at vektorene $\vec{u} = [12, a]$ og $\vec{v} = [5, 2]$ blir parallelle.

$$\begin{aligned}\vec{u} &\parallel \vec{v} \\ [12, a] &= k \cdot [5, 2] \\ 12 &= k \cdot 5 \quad \text{og} \quad a = k \cdot 2 \\ k &= 2,4 \quad \text{og} \quad a = 2 \cdot 2,4 = 4,8\end{aligned}$$

$[12, 4,8]$ er altså parallell med $[5, 2]$.

Oppgave 1.27

Bestem a slik at vektorene blir parallelle.

- a $\vec{u} = [3, 4]$ og $\vec{v} = [a, 15]$
- b $\vec{u} = [1 - a, 8]$ og $\vec{v} = [-5, 12]$
- c $\vec{u} = [a, 1]$ og $\vec{v} = [a, 2]$

Eksempel 5 Punkter på en rett linje

Vi vil undersøke om punktene $P = (1, 4)$, $Q = (4, 2)$ og $R = (10, -2)$ ligger på en rett linje.

Hvis P , Q og R ligger på en rett linje, er vektorene $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ og $\overrightarrow{PR}$ parallelle.

Det er tilstrekkelig å sjekke om to av vektorene er parallelle. Vi velger $\overrightarrow{QP}$ og $\overrightarrow{QR}$.

$$\overrightarrow{QP} = [1 - 4, 4 - 2] = [-3, 2]$$

$$\overrightarrow{QR} = [10 - 4, -2 - 2] = [6, -4]$$

Vi ser at $\overrightarrow{QR} = -2\overrightarrow{QP}$. Det vil si at P , Q og R ligger på en rett linje.

Sti 1

Sti 2

Sti 3

Stifinner: side 288

Oppgave 1.28

Avgjør om punktene ligger på en rett linje.

a $(2, 5)$, $(4, 8)$ og $(8, 14)$

b $(-3, 12)$, $(0, 7)$ og $(4, 1)$

1.6**SKALARPRODUKT**

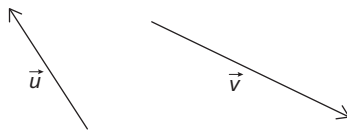
I 1.6 skal du lære å avgjøre om vektorer står vinkelrett på hverandre, og å finne vinkelen mellom to vektorer.

Vi har tidligere sett hvordan vi kan avgjøre om to vektorer er parallelle. I dette underkapitlet kommer ortogonale vektorer til å stå sentralt. Det vil si vektorer som står vinkelrett på hverandre. (Ortos = rett, gonia = vinkel.)

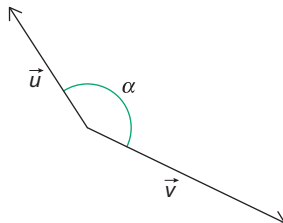
Vi skal også se hvordan vi kan bestemme vinkelen mellom to vektorer. Da trenger vi først en entydig definisjon av hva vi mener med vinkelen mellom vektorer:

Vinkelen α mellom to vektorer

α er den *minste* vinkelen vi må dreie én av vektorene slik at vektorene får samme retning.

**NB!** ►

For å få et klart bilde av vinkelen α må vi tegne vektorene ut fra samme punkt!



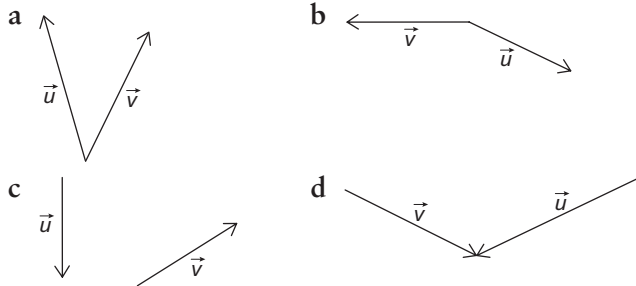
Vinkelen mellom to vektorer ligger alltid i intervallet $[0^\circ, 180^\circ]$.

Vinkelen mellom to parallelle vektorer er 0° eller 180° , som denne figuren viser:



Oppgave 1.29

Finn vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ved hjelp av gradskive.



Hva er vinkelen mellom «langviservektoren» og «kortviservektoren»?

Skalarprodukt

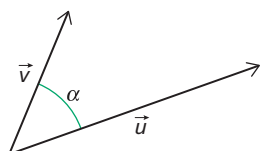
Vi er nå klare til å innføre den siste regneoperasjonen (i R1-kurset) for vektorer. Det er en spesiell måte å multiplisere to vektorer på, der resultatet avhenger av vektorenes lengder og av vinkelen mellom vektorene.

Regneoperasjonen likner ikke på noen regneoperasjoner du har lært så langt, men den følger mange av de samme reglene som gjelder for vanlig multiplikasjon. Derfor omtaler vi regneoperasjonen som et produkt, nærmere bestemt *skalarprodukt*. Dette navnet har den fått fordi *resultatet* er en skalar, dvs. et vanlig tall.

Så til definisjonen:

Skalarproduktet av to vektorer er lik lengden av den ene vektoren multiplisert med lengden av den andre vektoren multiplisert med cosinus til vinkelen mellom dem.

Med matematiske symboler skriver vi definisjonen slik:



Skalarprodukt

Skalarproduktet av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

der α er vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

På høyre side av likhetstegnet har vi tre tallfaktorer, og prikkene står for vanlig multiplikasjon.

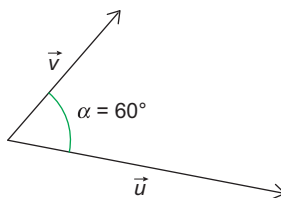
På venstre side står prikken mellom to vektorer, og da har vi et skalarprodukt.

Skalarproduktet blir også kalt *prikkprodukt*. Vi kan lese $\vec{u} \cdot \vec{v}$ som «u prikk v».

Eksempel 1 Skalarprodukt

Vi skal regne ut skalarproduktet av vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ med lengder henholdsvis 8 og 5, når vinkelen mellom dem er 60° .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 20$$



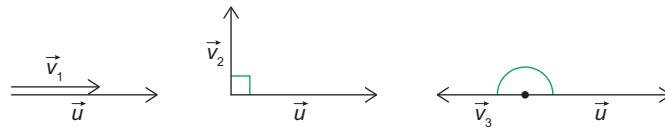
Oppgave 1.30

Regn ut skalarproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v}$ når $|\vec{u}| = 8$, $|\vec{v}| = 5$ og vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er

a 45° b 150° c 90°

Du lurer kanskje på hva vi skal *bruke* skalarproduktet til? Før vi går inn på det, ser vi på noen flere eksempler.

Nedenfor ser du vektoren $\vec{u}$ med lengden 8, og tre vektorer $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ og $\vec{v}_3$, alle med lengden 5.



Skalarproduktene for de tre tilfellene blir

$$\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 8 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ = 8 \cdot 5 \cdot 1 = 40$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 8 \cdot 5 \cdot \cos 90^\circ = 8 \cdot 5 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v}_3 = 8 \cdot 5 \cdot \cos 180^\circ = 8 \cdot 5 \cdot (-1) = -40$$

Skalarproduktet får størst verdi når vektorene har samme retning, og minst verdi når de har motsatt retning.

Legg spesielt merke til at skalarproduktet er null når vektorene står vinkelrett på hverandre.

For spisse vinkler er cosinus positiv, og for stumpe vinkler er cosinus negativ.

Vi lar α være vinkelen mellom to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ (som ikke er nullvektor).

Hvis $\alpha < 90^\circ$, er $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$.

Hvis $\alpha > 90^\circ$, er $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$.

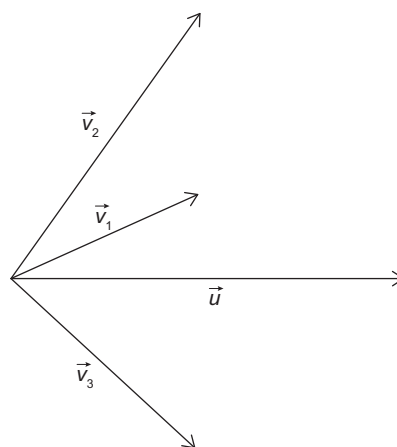
Hvis $\alpha = 90^\circ$, er $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Den siste linja kan vi også skrive slik:

Hvis $\vec{u} \perp \vec{v}$, er $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Skrivemåten $\perp$ betyr «står vinkelrett på».

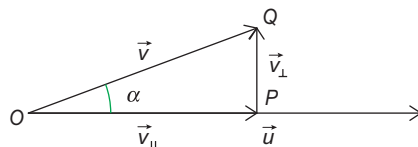
Oppgave 1.31



Mål vinkler og lengder på figuren, og regn ut skalarproduktene $\vec{u} \cdot \vec{v}_1$, $\vec{u} \cdot \vec{v}_2$ og $\vec{u} \cdot \vec{v}_3$. Hva finner du?

Skalarproduktet og parallellkomponenten

Nedenfor ser du to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ tegnet ut fra punktet O. Fra spissen av $\vec{v}$ har vi trukket en normal ned på $\vec{u}$.



Vi kan skrive $\vec{v}$ som en sum av to vektorer, der den ene er parallell med $\vec{u}$ og den andre står normalt på $\vec{u}$.

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$$

Å skrive en vektor som en sum kaller vi å *dekomponere* vektoren.

Hvis $\alpha < 90^\circ$, så har vi at $\cos \alpha = \frac{|\vec{v}_{\parallel}|}{|\vec{v}|}$, som gir $|\vec{v}_{\parallel}| = |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$.

Dette setter vi inn i definisjonen på skalarproduktet:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}_{\parallel}|$$

For $\alpha > 90^\circ$ kan en vise at $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}_{\parallel}|$.

Skalarproduktet er altså lik $\pm$ lengden av den ene vektoren multiplisert med lengden av *parallellkomponenten* til den andre vektoren. Fortegnet er negativt hvis $\alpha > 90^\circ$, og positivt hvis $\alpha < 90^\circ$.

Dette er viktig i forbindelse med definisjonen på arbeid i fysikk.

Oppgave 1.32

Tegn to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$, der $|\vec{u}| = 12$, $|\vec{v}| = 8$ og vinkelen mellom dem er 60° .

a $\vec{v}_{\parallel}$ er komponenten til $\vec{v}$ som er parallell med $\vec{u}$. Tegn denne komponenten og regn ut lengden av den.

Regn ut $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}_{\parallel}|$.

b Tegn komponenten til $\vec{u}$ som er parallell med $\vec{v}$, og regn ut lengden av den. Regn ut $|\vec{v}| \cdot |\vec{u}_{\parallel}|$.

Sammenlikn med resultatet i oppgave a.

Arbeid som skalarprodukt

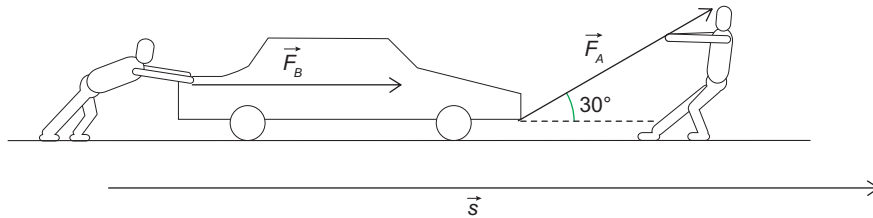
I fysikkfaget er størrelsen arbeid W definert som skalarproduktet av kraft $\vec{F}$ og forflytning $\vec{s}$:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Enheten til arbeid er newton $\cdot$ meter = joule.

Eksempel 2 Arbeid

Anton og Barbro har fått motorstopp. De flytter bilen 15 m langs en horisontal vei. Barbro dytter med en horisontal kraft på 450 N. Anton drar i et tau med en kraft på 500 N. Tauet danner 30° med veien.

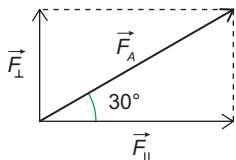


Barbro utfører arbeidet $W_B = \vec{F}_B \cdot \vec{s} = |\vec{F}_B| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos 0^\circ = 450 \text{ N} \cdot 15 \text{ m} \cdot 1 = 6750 \text{ J} \approx 6,8 \text{ kJ}$.

Anton utfører arbeidet $W_A = \vec{F}_A \cdot \vec{s} = |\vec{F}_A| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos 30^\circ = 500 \text{ N} \cdot 15 \text{ m} \cdot \cos 30^\circ = 6495 \text{ J} \approx 6,5 \text{ kJ}$.

Selv om Anton trekker med større kraft enn Barbro, utfører han altså mindre arbeid.

Dekomponerer vi $\vec{F}_A$ i komponenter langs $\vec{s}$ og vinkelrett på $\vec{s}$, får vi

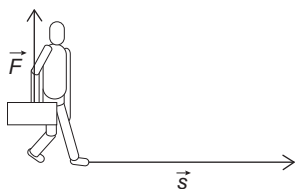


$$\vec{F}_A = [500 \cdot \cos 30^\circ, 500 \cdot \sin 30^\circ] = [433, 250]$$

Det er bare kraftkomponenten parallelt med forflytningen som bidrar til arbeid. Den er på 433 N. Kraftkomponenten på 250 N oppover utfører ikke noe arbeid.



Anton og Barbro inn i solnedgangen etter å ha fått bilen i gang igjen.

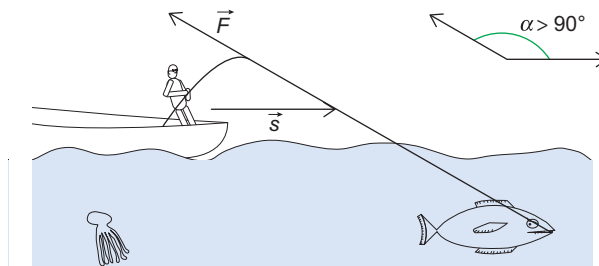


I eksempel 2 så vi eksempler på to krefter som begge utførte et positivt arbeid. Begge kreftene hadde komponenter i samme retning som forflytningen $\vec{s}$.

Hvis kraften $\vec{F}$ står vinkelrett på $\vec{s}$, blir skalarproduktet

$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = 0$. Kraften utfører da *ikke* noe arbeid. Se figur i margen.

Hvis vinkelen mellom $\vec{F}$ og $\vec{s}$ er større enn 90° , blir skalarproduktet $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ mindre enn null. Kraften $\vec{F}$ utfører et *negativt* arbeid. Det betyr at kraften bremser opp eller holder igjen gjenstanden som beveger seg.



Oppgave 1.33

Linda drar kofferten sin 60 m bortover gulvet på Oslo Lufthavn, Gardermoen. Hun bruker en kraft på 20 N. Kraften danner vinkelen 65° med gulvet. Hvor stort arbeid utfører Linda på kofferten?

Regneregler for skalarprodukt

For skalarprodukt gjelder disse regnereglene:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \textcircled{1}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d} \quad \textcircled{2}$$

$$\vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k\vec{a} \cdot \vec{b} \quad \textcircled{3}$$

Tilsvarende regneregler kjenner du fra vanlig multiplikasjon. I tillegg skriver vi $\vec{a}^2$ for $\vec{a} \cdot \vec{a}$. Det gir

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$$

Oppgave 1.34

Bruk definisjonen på skalarprodukt til å vise at

$$\text{a } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \text{b } \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k\vec{a} \cdot \vec{b}$$

Oppgave 1.35

Regn ut skalarproduktene. Husk at $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = 1$.

$$\begin{array}{lll} \text{a } \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y & \text{b } \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x & \text{c } \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y \\ \text{d } 2\vec{e}_x \cdot 5\vec{e}_y & \text{e } 3\vec{e}_x \cdot 8\vec{e}_x & \text{f } -4\vec{e}_y \cdot 3\vec{e}_y \end{array}$$

Skalarprodukt på koordinatform

Vi skal vise hvordan vi regner ut skalarproduktet av to vektorer når vi kjenner vektorkomponentene til vektorene.

Vi ser på skalarproduktet $(3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) \cdot (5\vec{e}_x - \vec{e}_y)$. Her kjenner vi i utgangspunktet verken lengden av vektorene eller vinkelen mellom dem.

Men vi kjenner lengden av $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$, og vinkelen mellom disse to vektorene.

Vi bruker regneregelen ② og utnytter at $\vec{e}_x^2 = \vec{e}_y^2 = 1$ og $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$:

$$\begin{aligned} & (3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) \cdot (5\vec{e}_x - \vec{e}_y) \\ &= 3\vec{e}_x \cdot 5\vec{e}_x + 3\vec{e}_x \cdot (-\vec{e}_y) + 4\vec{e}_y \cdot 5\vec{e}_x + 4\vec{e}_y \cdot (-\vec{e}_y) \\ &= 3 \cdot 5\vec{e}_x^2 + 3 \cdot (-1)\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y + 4 \cdot 5\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x + 4 \cdot (-1)\vec{e}_y^2 \\ &= 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-1) = 11 \end{aligned}$$

Utgangspunktet ovenfor viser at

$$[3, 4] \cdot [5, -1] = 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-1)$$

Dette kan vi generalisere:

Skalarprodukt på koordinatform

Skalarproduktet av $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$ er

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = [x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Oppgave 1.36

Regn ut skalarproduktene.

- | | | | |
|---|------------------------|---|-------------------------|
| a | $[2, 5] \cdot [1, 3]$ | b | $[-1, 4] \cdot [4, 1]$ |
| c | $[-8, 4] \cdot [1, 2]$ | d | $[-7, 3] \cdot [5, 12]$ |

Ortogonale vektorer

Fra definisjonen på skalarprodukt, $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$, vet vi at skalarproduktet er null for ortogonale vektorer, dvs. vektorer som står vinkelrett på hverandre.

Hvis skalarproduktet ikke er null, er vinkelen mellom vektorene forskjellig fra 90° .

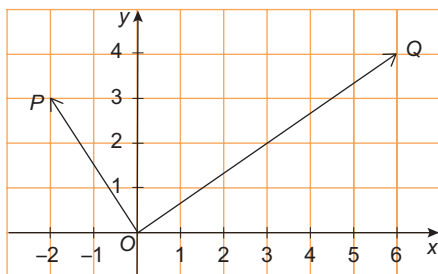
Dette skal vi bruke til å undersøke *ortogonalitet*.

Ortogonale vektorer

To vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$ er ortogonale hvis $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$, og ellers ikke.

Eksempel 3 Ortogonale vektorer?

Vi skal avgjøre om vektorene $\overrightarrow{OP} = [-2, 3]$ og $\overrightarrow{OQ} = [6, 4]$ er ortogonale.



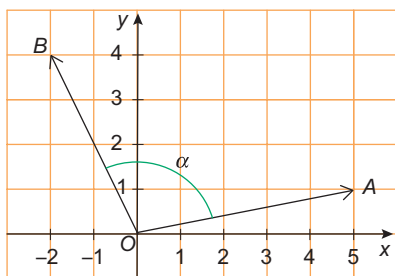
Vi regner ut skalarproduktet $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$.

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = [-2, 3] \cdot [6, 4] = (-2) \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 0$$

Siden skalarproduktet er null, er vektorene $\overrightarrow{OP}$ og $\overrightarrow{OQ}$ ortogonale.

Eksempel 4 Ortogonale vektorer?

Vi skal avgjøre om vektorene $\overrightarrow{OA} = [5, 1]$ og $\overrightarrow{OB} = [-2, 4]$ er ortogonale.



Skalarproduktet blir

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = [5, 1] \cdot [-2, 4] = 5 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = -10 + 4 = -6$$

Siden skalarproduktet ikke er null, er vektorene ikke ortogonale.

Vinkelen α på figuren er altså ikke rett.

Oppgave 1.37

Avgjør om vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ortogonale når

- a $\vec{u} = [4, 1]$ og $\vec{v} = [-4, 16]$
- b $\vec{u} = [-2, 5]$ og $\vec{v} = [14, 6]$
- c $\vec{u} = [-8, -15]$ og $\vec{v} = [12, -5]$
- d $\vec{u} = [12, -8]$ og $\vec{v} = [-6, -9]$

Eksempel 5 Å finne en vektor som står vinkelrett på en gitt vektor

Vi vil bestemme k slik at vektorene $\vec{u} = [7, 4]$ og $\vec{v} = [2, k]$ blir ortogonale.

Vi setter skalarproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v}$ lik null. Da får vi en likning med k som ukjent.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$[7, 4] \cdot [2, k] = 0$$

$$7 \cdot 2 + 4 \cdot k = 0$$

$$4 \cdot k = -14$$

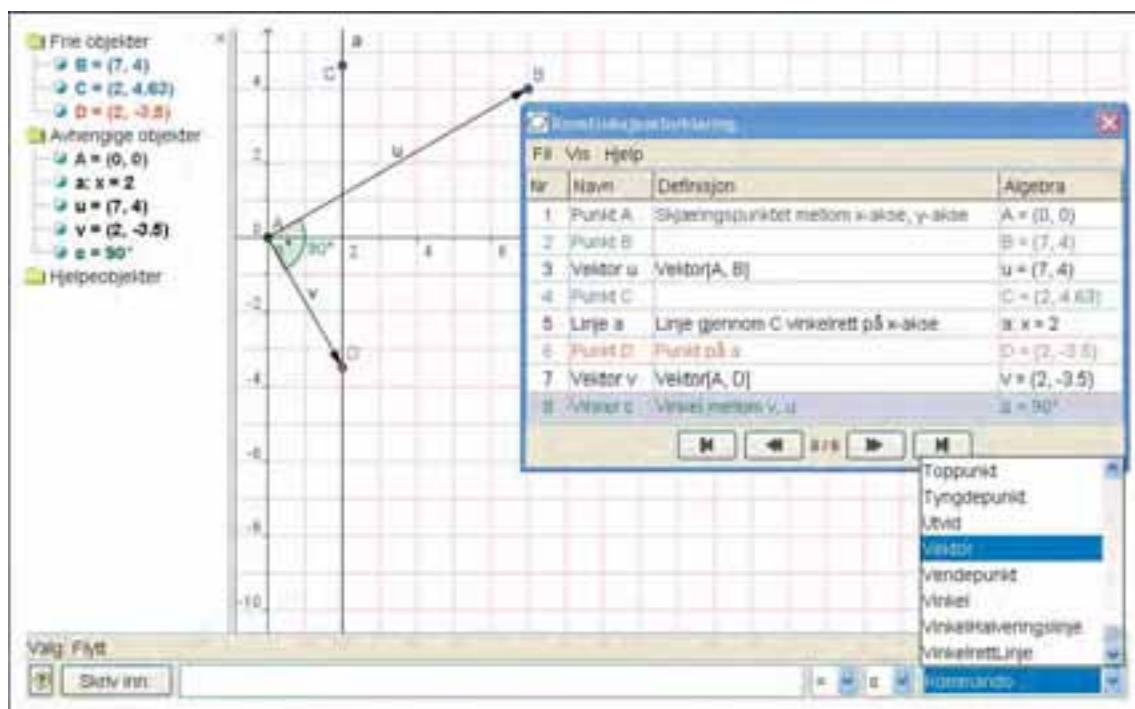
$$k = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2}$$

Vektorene $\vec{u} = [7, 4]$ og $\vec{v} = [2, -\frac{7}{2}]$ er ortogonale.

Nedenfor ser du et skjermbilde fra programmet GeoGebra (www.geogebra.org).

Vi har her funnet løsningen $k = -3,5$ grafisk.

(Som en hjelp har vi vist konstruksjonsforklaring og vist hvor du finner kommandoen «Vektor».)



Først har vi definert to punkter A og B slik at $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = [7, 4]$.

Deretter har vi lagt inn et punkt C med x-koordinat 2.

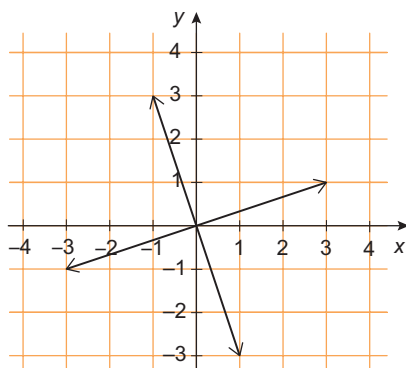
Gjennom C har vi tegnet en linje vinkelrett på x-aksen.

Så har vi plassert et punkt D på linja og definert vektoren $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Da blir x-komponenten til $\vec{v}$ lik 2 uansett hvor vi flytter D på linja.

Etter å ha definert vinkelen α mellom vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$, lar vi D gli langs linja inntil α blir 90° .

Ser du hvor på figuren du kan lese av k ?

Figuren viser vektorene $[3, 1]$, $[-1, 3]$, $[-3, -1]$ og $[1, -3]$.



Hver av vektorene står vinkelrett på to av de andre vektorene.

Generelt har vi at vektorene $[b, -a]$ og $[-b, a]$ står vinkelrett på $[a, b]$. Vis dette!

NB! ►

En enkel måte å finne en ortogonal vektor til $[a, b]$ på er altså å bytte om på x - og y -koordinatene, og skifte *ett* fortegn.

Oppgave 1.38

Bestem verdien til k slik at vektorene blir ortogonale.

- a $[2, 5] \cdot [k, 2]$ b $[-1, k] \cdot [3, 3]$
 c $[k, k-4] \cdot [1, 3]$ d $[k-1, 3] \cdot [k, -2]$

Oppgave 1.39

Finn en vektor som står vinkelrett på

- a $[5, 1]$ b $[-3, 2]$ c $[7, -8]$

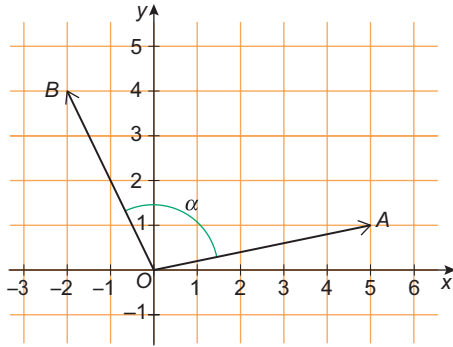
Skalarprodukt og vinkelen mellom vektorer

Vi har så langt sett hvordan vi kan bruke skalarproduktet til å avgjøre ortogonalitet.

Nå skal vi bestemme vinkelen mellom vektorer.

Eksempel 6 Vinkel mellom vektorer

Vi vil regne ut vinkelen α mellom vektorene $\overrightarrow{OA} = [5, 1]$ og $\overrightarrow{OB} = [-2, 4]$.



Først regner vi ut skalarproduktet:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = [5, 1] \cdot [-2, 4] = 5 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = -6$$

Dette resultatet kan vi kombinere med definisjonen på skalarprodukt:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos \alpha$$

Vi kjenner venstresiden og regner ut lengdene av $\overrightarrow{OA} = [5, 1]$ og $\overrightarrow{OB} = [-2, 4]$:

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} \quad \text{og} \quad |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}.$$

$$\text{Det gir } \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \frac{-6}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{20}} = -0,2631$$

$$\alpha = \cos^{-1}(-0,2631) = 105,3^\circ$$

Vinkelen α mellom $\overrightarrow{OA}$ og $\overrightarrow{OB}$ er altså ca. 105° .

Vinkelen α mellom to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$ er gitt ved

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad (1)$$

Eksempel 7 Vinkel mellom vektorer

Vi vil regne ut vinkelen α mellom vektorene $[-1, 3]$ og $[2, 5]$.

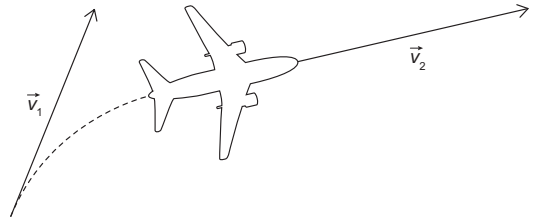
$$\cos \alpha = \frac{-1 \cdot 2 + 3 \cdot 5}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 5^2}} = 0,7634$$

$$\alpha = \cos^{-1}(0,7634) = 40,2^\circ$$

Vinkelen α mellom vektorene $[-1, 3]$ og $[2, 5]$ er $40,2^\circ$.

Eksempel 8 Kursendring

På grunn av tåke må et fly endre kurs.
 Flyet holder konstant høyde over bakken.
 Vi ser på kursendringen i et koordinatsystem
 der x -aksen peker østover og y -aksen nordover.
 Før kursendringen var fartsvektoren
 $\vec{v}_1 = [150, 360]$. Etter kursendringen
 var fartsvektoren $\vec{v}_2 = [400, 90]$.
 Farten er gitt i km/h.



Vi vil finne kursendringen, det vil si vinkelen mellom de to vektorene $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$.
 Vi regner først ut lengden av vektorene.

$$|\vec{v}_1| = |[150, 360]| = \sqrt{150^2 + 360^2} = 390 \quad \text{og} \quad |\vec{v}_2| = |[400, 90]| = \sqrt{400^2 + 90^2} = 410$$

Svarene viser at flyet hadde farten 390 km/h før kursendringen, og 410 km/h etter.

Så setter vi inn i formel ① på forrige side.

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} = \frac{150 \cdot 400 + 360 \cdot 90}{390 \cdot 410} = 0,5779$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0,5779 = 54,7^\circ \approx 55^\circ$$

Flyets kursendring var 55° .

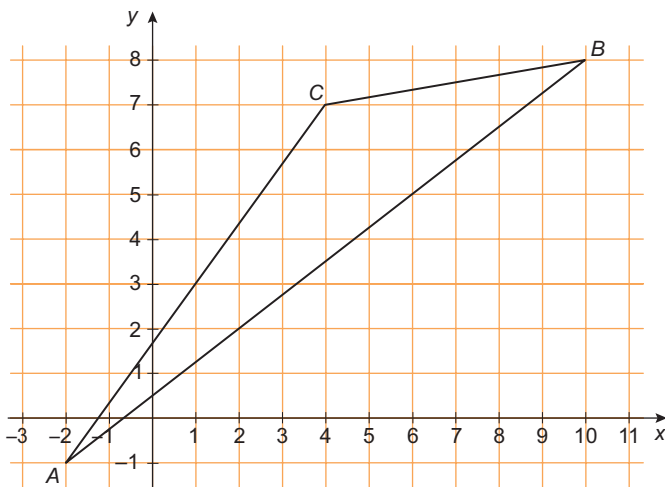
Oppgave 1.40

Regn ut skalarproduktene og bestem vinkelen mellom vektorene.

- | | |
|----------------------------|--------------------------|
| a $[2, 5] \cdot [-5, 2]$ | b $[-1, 2] \cdot [1, 3]$ |
| c $[-12, 5] \cdot [40, 9]$ | d $[-4, 0] \cdot [2, 1]$ |

Eksempel 9 Vinkler i en trekant

Vi skal finne vinklene i trekanten ABC , der $A = (-2, -1)$, $B = (10, 8)$ og $C = (4, 7)$.



Vi starter med vinkel A. Det er vinkelen mellom vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

Vi finner først koordinatene til $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ og lengdene av vektorene:

$$\overrightarrow{AB} = [10 - (-2), 8 - (-1)] = [12, 9] \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$$

$$\overrightarrow{AC} = [4 - (-2), 7 - (-1)] = [6, 8] \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

Så finner vi vinkelen:

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{[12, 9] \cdot [6, 8]}{15 \cdot 10} = \frac{12 \cdot 6 + 9 \cdot 8}{150} = 0,96$$

$$A = \cos^{-1}(0,96) = 16,3^\circ$$

Så finner vi vinkel B. Det er vinkelen mellom vektorene $\overrightarrow{BA}$ og $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = [-12, -9] \quad \text{og} \quad \overrightarrow{BC} = [4 - 10, 7 - 8] = [-6, -1]$$

$$|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{AB}| = 15 \quad \text{og} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-6)^2 + (-1)^2} = \sqrt{37}$$

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{[-12, -9] \cdot [-6, -1]}{15 \cdot \sqrt{37}} = 0,8878$$

$$B = \cos^{-1} 0,8878 = 27,4^\circ$$

$$\text{Vinkel } C = 180^\circ - 16,3^\circ - 27,4^\circ = 136,3^\circ$$

Vi kunne også ha funnet vinklene i trekanten ved hjelp av cosinussetningen. Da måtte vi ha regnet ut alle lengdene først. Etter å ha regnet ut én vinkel, kunne vi også ha brukt sinussetningen.

Sti 1

Sti 2

Sti 3

Stifinner: side 290

Oppgave 1.41

Bestem vinklene i trekanten ABC.

a $A = (2, 3)$, $B = (6, 4)$ og $C = (4, 5)$

b $A = (-3, 2)$, $B = (3, -6)$ og $C = (1, 1)$

1.7

SKALARPRODUKT OG GEOMETRISKE PROBLEMER

I 1.7 skal du lære å bruke skalarproduktet til å løse ulike geometriske problemer.

Bruk av regneregler for skalarprodukt

Ved å regne med koordinatfrie vektorer kan vi vise mange generelle resultater som gjelder linjer som står vinkelrett på hverandre. Da får vi bruk for regnereglene for skalarprodukt fra s. 44.

Eksempel 1 Ortogonale diagonaler

I dette eksemplet skal vi bruke regneregler for skalarprodukt til å vise at diagonalene i en rombe står vinkelrett på hverandre.

En rombe er en firkant der alle sidene er like lange.

Vi setter $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ og $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$. Da er også $\overrightarrow{DC} = \vec{u}$ og $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.

Diagonalene uttrykker vi så ved $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} - \vec{v}$$

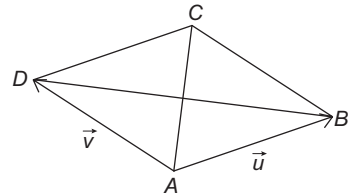
Vi må nå vise at skalarproduktet $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ er null.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} \quad \text{Husk at } \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}. \\ &= |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2\end{aligned}$$

I en rombe er sidene like lange, altså er $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

Da er $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = |\vec{u}|^2 - |\vec{u}|^2 = 0$.

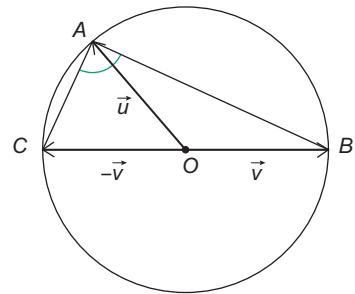
Dette viser at diagonalene i en rombe står vinkelrett på hverandre.

**Eksempel 2 Thales' setning**

En vinkel som har toppunkt på en sirkelperiferi (sirkellinje), kaller vi en *periferivinkel*. Hva kan vi si om en periferivinkel som spenner over sirkeldiameteren, dvs. en bue på 180° ?

Vi vil sjekke om periferivinkelen BAC er 90° .

Vi uttrykker skalarproduktet $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ved vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$, se figuren. Disse vektorene vet vi har samme lengde, lik radien i sirkelen.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \\ &= (-\vec{u} + \vec{v}) \cdot (-\vec{u} - \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0\end{aligned}$$

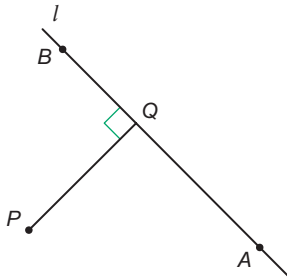
Vinkel BAC er altså 90° . Dette gjelder uansett hvor på sirkelperiferien vi plasserer A .

Det at en periferivinkel som spenner over en bue på 180° , er 90° , kalles *Thales' setning*. (Se også side 245.)

Oppgave 1.42

La ABC være en likebeint trekant med $AC = BC$, og la M være midtpunktet på AB . Bruk vektorregning til å vise at CM står vinkelrett på AB .

Hint: Sett $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$ og $\overrightarrow{CB} = \vec{v}$. Uttrykk $\overrightarrow{CM}$ og $\overrightarrow{AB}$ ved $\vec{u}$ og $\vec{v}$.



Avstand fra et punkt til en linje

Avstanden fra et punkt P til en linje l måler vi langs en normal fra P ned på linja.

Vi skal se på en metode til å finne avstanden fra et gitt punkt P til en rett linje l som går gjennom to gitte punkter A og B .

Vi lar Q være skjæringspunktet mellom l og normalen fra P ned på l . Siden vi kjenner koordinatene til P , A og B , kan vi finne koordinatene til $\overrightarrow{PA}$ og $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{PQ}$ kan skrives $\overrightarrow{PA} + k \cdot \overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{PQ}$ blir da bestemt ved $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB}$, ved at $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB}$ skal være 0.

Eksempel 3 Avstand fra punkt til linje

Linja l går gjennom punktene $A = (1, -1)$ og $B = (4, 8)$.

Vi skal finne det punktet Q på l som ligger nærmest $P = (6, 4)$, og bestemme avstanden mellom P og Q .

Vi bestemmer $\overrightarrow{AB}$ og uttrykker $\overrightarrow{PQ}$ ved $\overrightarrow{PA}$ og $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = [4 - 1, 8 - (-1)] = [3, 9]$$

$$\overrightarrow{PA} = [1 - 6, -1 - 4] = [-5, -5]$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PA} + k \cdot \overrightarrow{AB} = [-5, -5] + k \cdot [3, 9] \\ &= [-5, -5] + [3k, 9k] \\ &= [3k - 5, 9k - 5] \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

Så finner vi k :

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{PQ}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

$$[3, 9] \cdot [3k - 5, 9k - 5] = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$3 \cdot (3k - 5) + 9 \cdot (9k - 5) = 0$$

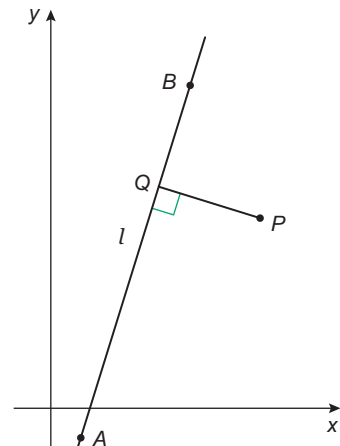
$$9k - 15 + 81k - 45 = 0$$

$$90k = 60$$

$$k = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$

Så setter vi verdien til k inn i uttrykket for $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = [3 \cdot \frac{2}{3} - 5, 9 \cdot \frac{2}{3} - 5] = [-3, 1]$$



Posisjonsvektoren til Q blir $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = [6, 4] + [-3, 1] = [3, 5]$.

Punktet på linja l som ligger nærmest P , har altså koordinatene $(3, 5)$.

Avstanden mellom P og linja er $|\overrightarrow{PQ}| = |[-3, 1]| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10} \approx 3,2$.

Oppgave 1.43

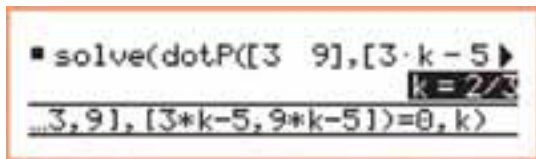
Finn avstanden mellom punktet P og linja l .

a $P = (2, 6)$ og l går gjennom $A = (1, 1)$ og $B = (7, 5)$.

b $P = (5, 8)$ og l går gjennom $A = (-2, 1)$ og $B = (14, -5)$.

Eksempel 4 Symbolbehandlende verktøy

På noen symbolbehandlende verktøy kan vi foreta utregninger med vektorer som inneholder ukjente størrelser. Det gjør at vi for eksempel kan regne ut uttrykket ① i eksempel 3 ved hjelp av det digitale verktøyet. Deretter kan vi bruke verktøyets likningsløser og kommandoen for skalarprodukt til å løse likningen ②. Det kan for eksempel se slik ut:



Her har vi skrevet inn

`solve(dotP([3, 9], [3k - 5, 9k - 5]) = 0, k)`

(Den nederste linja på bildet viser slutten av inntastingen.)

Med kommandoen `dotP` finner vi skalarproduktet, og med kommandoen `solve` (likningsløser) finner vi for hvilken verdi av k skalarproduktet er 0. (Kommandoer og inntastingsregler vil variere fra verktøy til verktøy.)

Legg merke til at svaret $k = 2/3$ vises direkte. Sammenlikn med utregningen i eksempel 3.

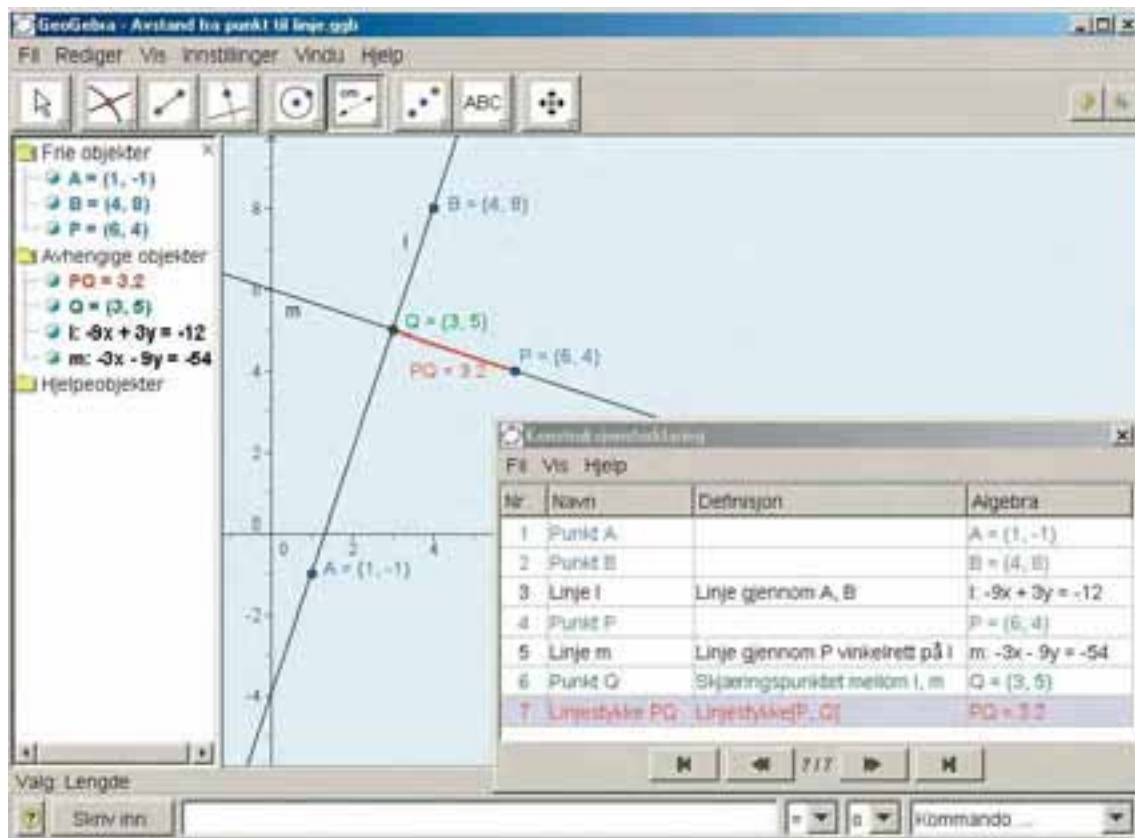
Se også eksempel 10 på side 64.

Eksempel 5 Avstand fra punkt til linje – grafisk løsning uten vektorer

Vi tar for oss problemstillingen fra eksempel 3 på forrige side: Linja l går gjennom punktene $A = (1, -1)$ og $B = (4, 8)$. Vi skal finne punktet Q på linja l som ligger nærmest $P = (6, 4)$, og bestemme avstanden mellom P og Q .

Vi vil nå finne Q og avstanden PQ grafisk ved å bruke et konstruksjonsprogram. Vi velger å ikke bruke vektorregning i denne løsningen.

På figuren nedenfor viser vi en løsning i programmet GeoGebra (www.geogebra.org). Vinduet «Konstruksjonsforklaring» viser gangen i konstruksjonen.



Først avsatte vi punktene A og B.
 Så trakk vi linja l gjennom A og B.
 Deretter avsatte vi punktet P.
 Gjennom P konstruerte vi en linje m normalt på l .
 Vi definerte skjæringspunktet mellom linjene l og m som punktet Q.
 Til slutt avsatte vi linjestykket mellom P og Q og målte lengden til å være 3,2.

Sammenlikn med løsningen i eksempel 3.

I kapittel 6 skal du bruke konstruksjonsprogram for å løse mange geometriske problemer. Slike programmer kan også være nyttige i funksjonskapitlene 4 og 5.

Sti 1 Sti 2 Sti 3

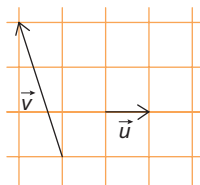
Stifinner: side 293

Oppgave 1.44

- Løs oppgave 1.43a ved å bruke konstruksjonsprogram.
- Løs noen andre oppgaver i kapittel 1 ved å bruke konstruksjonsprogram. Forslag: 1.23, 1.25a, 1.28a, 1.37a, 1.41a.

KAPITTELTEST

1.A



Tegn vektoren $\vec{w}$ når

- a $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$
- b $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$
- c $\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$
- d $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$

1.B

$\vec{u}$ og $\vec{v}$ er to ikke-parallelle vektorer. Hvilke vektorer er parallelle?

$$\vec{a} = 4\vec{u} - 3\vec{v}, \vec{b} = 6\vec{v} - 8\vec{u},$$

$$\vec{c} = 12\vec{u} - 10\vec{v}, \vec{d} = 60\vec{v} - 72\vec{u}$$

1.C

Bestem p og q slik at

- a $\vec{u} - (3 - p)\vec{v} = (p + 4)\vec{u} - 6\vec{v}$
- b $p\vec{u} + (q + p)\vec{v} = 2\vec{u} - \vec{v}$
- c $p^2\vec{v} - q\vec{u} = 2q\vec{v} + (1 - p^2)\vec{u}$

1.D

Finn vektoren.

- a $[2, -4] + [3, 3]$
- b $[1, 0] - [4, -2]$
- c $3 \cdot [2, 1] - 2 \cdot [-3, 4] - [12, -5]$

1.E

Firkanten $ABCD$ er et parallelogram.

$A = (-2, -5)$, $\vec{AB} = [5, 3]$, og den ene diagonalen er $\vec{DB} = [3, -3]$.

Bestem koordinatene til B , C og D .

1.F

Bestem t slik at vektoren $[t - 1, 2t]$ får lengden 5.

1.G

En firkant har hjørnene $A = (-2, 1)$, $B = (2, 4)$, $C = (5, 8)$ og $D = (1, 5)$.

- a Finn skalarproduktet $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$. Hva kan du si om diagonalene i firkanten?
- b Finn vinklene i firkanten.
- c Hva slags firkant er $ABCD$?

1.H

To vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er begge forskjellige fra nullvektoren. Finn skalarproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v}$ når $(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2$.

1.I

I trekanten ABC er $A = (4, -2)$, $B = (12, 4)$ og $C = (1, 2)$.

- a Avgjør om trekanten er rettvinklet.
- b Bestem avstanden fra A til linja gjennom B og C .

SAMMENDRAG

Vektorer

En vektor er et linjestykke med retning.

Posisjonsvektor

En vektor som starter i origo O og går til et punkt P , kaller vi posisjonsvektoren til P .

Like vektorer

$\vec{u} = \vec{v}$ hvis $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ og vektorene har samme retning.

$[x_1, y_1] = [x_2, y_2]$ hvis $x_1 = x_2$ og $y_1 = y_2$.

Addisjon av vektorer

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$[x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$$

Subtraksjon av vektorer

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$$

$$[x_1, y_1] - [x_2, y_2] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2]$$

Multiplikasjon med skalar

$\vec{v}$ og $k\vec{v}$ har samme retning hvis $k > 0$.

$\vec{v}$ og $k\vec{v}$ er motsatt rettet hvis $k < 0$.

$$k[x, y] = [kx, ky]$$

Parallelle vektorer

Hvis det fins et tall k slik at $\vec{u} = k\vec{v}$, så er $\vec{u}$ og $\vec{v}$ parallelle vektorer.

Lengden av en vektor

$$|\vec{v}| = |[x_1, y_1]| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Vektoren mellom to punkter

$$P = (x_1, y_1) \text{ og } Q = (x_2, y_2)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$$

Avstanden mellom to punkter

$$P = (x_1, y_1) \text{ og } Q = (x_2, y_2)$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = |[x_2 - x_1, y_2 - y_1]| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Skalarprodukt

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = [x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Vinkelen α mellom to vektorer

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Norsk-engelsk

dekomponering decomposition

enhetsvektor unit vector

komponent component

lengden av en vektor magnitude of a vector

ortogonal orthogonal

parallel parallel

posisjonsvektor position vector

skalarprodukt scalar product, dot product

vektor vector

vinkelrett perpendicular

1 | Oppgavesamling

Vektorer

STIFINNEREN

	Sti 1	Sti 2	Sti 3
1.1 Hva er en vektor?	100, 101, 102, 103	101, 102, 103, 104	101, 102, 103, 104
1.2 Addisjon og subtraksjon av vektorer	105, 106, 108, 110, 111	106, 108, 109, 112, 114, 115▲	106, 107, 108, 112, 113▲, 116▲
1.3 Parallelle vektorer	117, 119, 121, 122▲	118, 120, 121, 122▲, 124▲	121, 123▲, 124▲, 125▲, 126▲
1.4 Vektorkoordinater	128, 130, 131, 134	129, 131, 133, 134, 136▲	133, 135▲, 136▲, 137▲
1.5 Lengden av vektorer	138, 140, 141, 143	138, 139, 142, 147▲, 149▲	142, 145, 146, 148▲, 149▲, 151▲
1.6 Skalarprodukt	152, 154, 157, 158, 164▲, 166▲	153, 154, 156, 157, 158, 161, 165▲, 166▲	155, 159▲, 160, 162▲, 163▲, 166▲, 167▲, 169▲▲
1.7 Skalarprodukt og geometriske problemer	170▲, 171▲	170▲, 171▲, 172▲▲	171▲, 172▲▲, 173▲▲

15 rette eller gale: s. 294

Blandede oppgaver (174–X1.7): s. 294

Utvalgte løsninger: Lokus.no

Grunnleggende ferdigheter:

Muntlige ferdigheter: 119, 123, 159, 161, 163, 170

Skriftlige ferdigheter: 119, 123, 124, 133, 163, 173

Leseferdigheter: 113, 123, 151

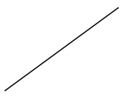
Digitale ferdigheter: 124, 151, 166, 169, 179, 182

Interaktive oppgaver: Lokus.no

1.1 Hva er en vektor?

Sti 1	Sti 2	Sti 3
100, 101, 102, 103	101, 102, 103, 104	101, 102, 103, 104

100 Hvilket eller hvilke av objektene er en vektor?

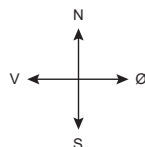
- a  b  c 12,5 d •

101 Hvilke størrelser er vektorer, og hvilke er skalarer?

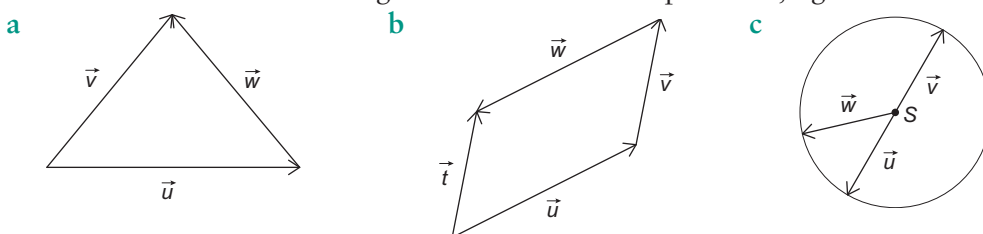
- a Volumet av tanken på en oljetanker
b Farten til en oljetanker
c Tyngden på en oljetanker
d Tiden en oljetanker bruker over Atlanteren

102 Tegn en vektor som har

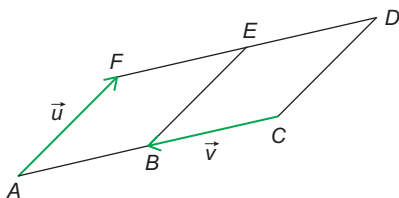
- a retning mot nord og lengde 5 cm
b retning mot vest og lengde 8 cm
c retning mot sørøst og lengde 12 cm



103 Nedenfor ser du en likebeint trekant, et parallelogram og en sirkel med sentrum S . Er noen av vektorene like lange? Hvilke vektorer er parallelle, og hvilke vektorer er like?



104 Figuren viser to romber $ABEF$ og $BCDE$.



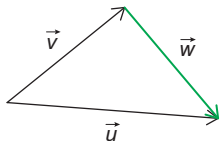
- a Hvilke vektorer er lik $\vec{u}$?
b Hvilke vektorer er lik $\vec{v}$?

1.2 Addisjon og subtraksjon av vektorer

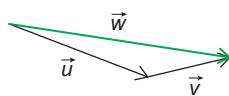
Sti 1	Sti 2	Sti 3
105, 106, 108, 110, 111	106, 108, 109, 112, 114, 115▲	106, 107, 108, 112, 113▲, 116▲

105 Avgjør for hver figur om $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

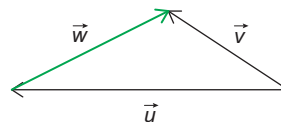
a



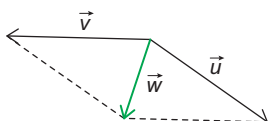
b



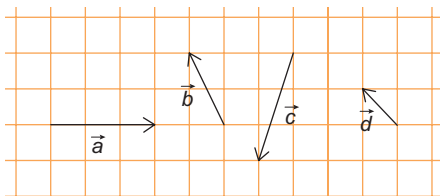
c



d



106

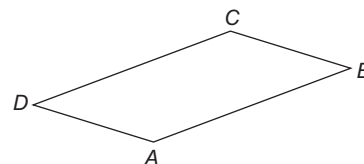


Tegn vektorsummen.

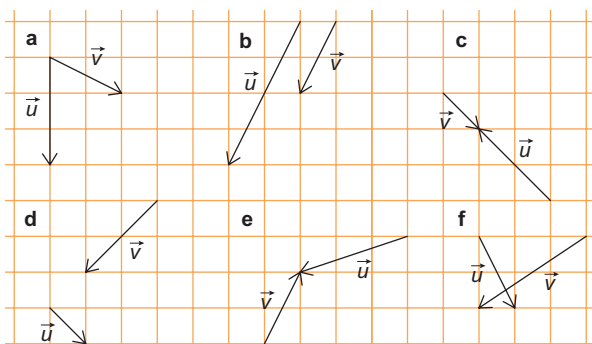
a $\vec{a} + \vec{b}$ b $\vec{c} + \vec{b}$ c $\vec{a} + \vec{c} + \vec{d}$ d $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

107 ABCD er et parallelogram. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, der $\overrightarrow{AC}$ er en vektor i parallelogrammet.

I oppgave a–d skal du tegne vektoren og skrive den som en vektor i parallelogrammet.

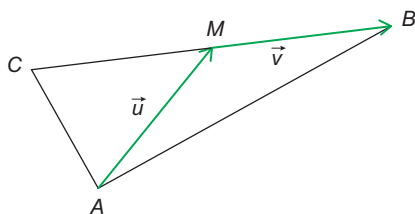
a $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$ b $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ c $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$ d $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$ 

108 Tegn vektordifferansen $\vec{u} - \vec{v}$.



- * 109 To vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ har samme retning. $\vec{u}$ er tre ganger så lang som $\vec{v}$. Finn $|\vec{u} + \vec{v}|$ og $|\vec{u} - \vec{v}|$ uttrykt ved $|\vec{v}|$.

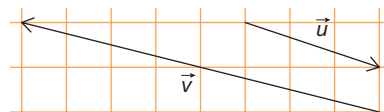
- * 110 På figuren er M midtpunktet på BC .



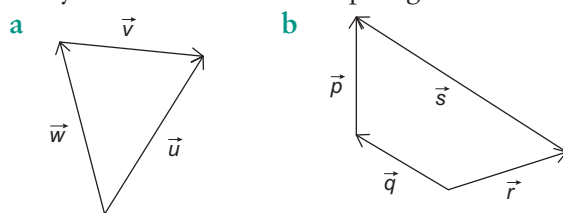
Finn vektoren uttrykt ved $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

- a $\overrightarrow{AB}$ b $\overrightarrow{MC}$ c $\overrightarrow{AC}$ d $\overrightarrow{BA}$

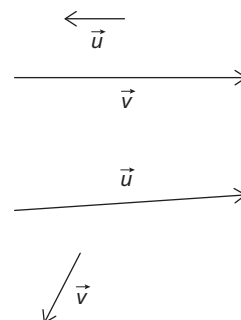
- 111 Farten til en tennisball idet den treffer tennisrekkerten er $\vec{u}$. Ballen forlater rekkerten med farten $\vec{v}$. Tegn en vektor som viser fartsendringen til tennisballen.



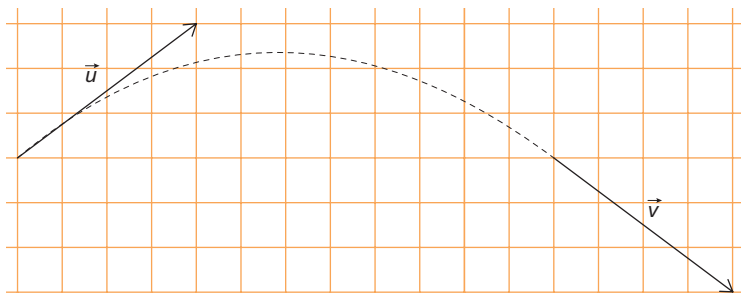
- 112 Uttrykk hver av vektorene på figuren ved de andre vektorene.



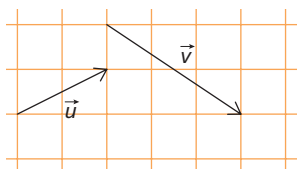
- * 113 a Anitra reiser med tog. Hun beveger seg bakover i toget med farten $\vec{u}$ (i forhold til toget). Samtidig beveger toget seg forover (i forhold til bakken) med farten $\vec{v}$. Se den øverste figuren til høyre. Tegn en vektor som viser Anitras fart i forhold til bakken.
- b Conrad er ute og padler i sterk strøm. Vektoren $\vec{u}$ er Conrads fart i forhold til vannet. Vektoren $\vec{v}$ er farten til vannet i forhold til sjøbunnen. Se den nederste figuren til høyre. Tegn en vektor som viser Conrads fart i forhold til bunnen.



- 114 a Gunder kaster et spyd. Spydet forlater hånda med farten $\vec{u}$. Det treffer bakken med farten $\vec{v}$. Se figur. Tegn en vektor som viser fartsendringen.



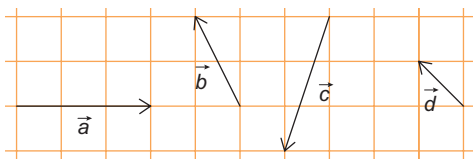
115▲



Figuren viser vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$. Tegn en vektor $\vec{w}$ slik at

a $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$ **b** $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} = \vec{v}$ **c** $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = -\vec{w}$

* 116▲



Tegn en vektor $\vec{v}$ slik at

a $\vec{a} + \vec{c} + \vec{v} = \vec{0}$ **b** $\vec{c} + \vec{d} + \vec{v} = \vec{0}$ **c** $\vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{v} = \vec{0}$

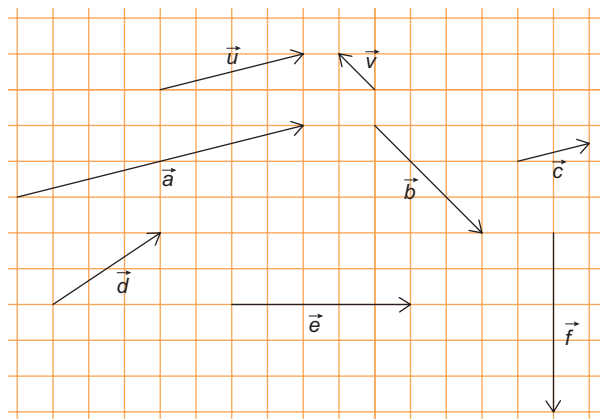
1.3 Parallele vektorer

Sti 1	Sti 2	Sti 3
117, 119, 121, 122▲	118, 120, 121, 122▲, 124▲	121, 123▲, 124▲, 125▲, 126▲

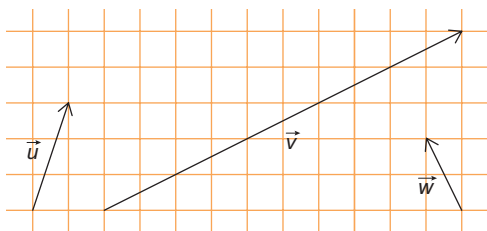
117 Skriv $\vec{u}$ uttrykt ved $\vec{v}$ når

- a** $\vec{u}$ er dobbelt så lang som $\vec{v}$ og vektorene har samme retning
b $\vec{u}$ er halvparten så lang som $\vec{v}$ og vektorene har samme retning
c $\vec{u}$ er tre ganger så lang som $\vec{v}$ og vektorene har motsatt retning
d $\vec{u}$ er 50 % lengre enn $\vec{v}$ og vektorene har motsatt retning

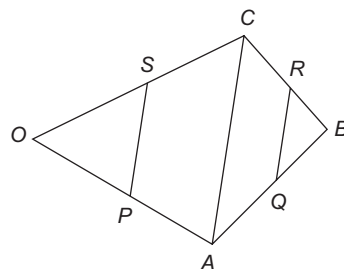
118 Uttrykk de andre vektorene på figuren ved $\vec{u}$ og $\vec{v}$.



- 119 For to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ gjelder sammenhengen $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$, der k er et reelt tall og $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- Hva kan du si om retningene til $\vec{u}$ og $\vec{v}$, uansett hvilken verdi k har?
 - Hva kan du si om verdien til k hvis $\vec{u}$ og $\vec{v}$ har samme retning?
 - Hva kan du si om k hvis $\vec{u}$ og $\vec{v}$ har samme lengde?
 - Hva kan du si om k hvis lengden til $\vec{u}$ er større enn lengden til $\vec{v}$?
- 120 Om to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ vet du at $|\vec{u}| = 7$ og $|\vec{v}| = 5$.
- Hva er den største mulige verdien av $|\vec{u} + \vec{v}|$?
Hva kan du da si om retningene til de to vektorene?
 - Hva er den minste mulige verdien av $|\vec{u} + \vec{v}|$?
Hva kan du si om retningene til vektorene i dette tilfellet?
- 121 $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er to ikke-parallelle vektorer. Hvilke av disse vektorene er parallelle?
 $3\vec{u} - 2\vec{v}$ $3\vec{v} - 2\vec{u}$ $6\vec{u} - 4\vec{v}$ $-3\vec{u} + 2\vec{v}$ $6\vec{u} - 9\vec{v}$ $6\vec{v} + 4\vec{u}$
- * 122▲ $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er to ikke-parallelle vektorer. Bestem k og m slik at
- $\vec{u} - (k+1)\vec{v} = 2k\vec{v} + \vec{u}$
 - $2\vec{u} - \vec{v} = 2k\vec{v} + \vec{v} + 2\vec{u}$
 - $3\vec{v} + k\vec{v} - m\vec{u} = 2m\vec{u} - \vec{u} + \vec{v}$
 - $3\vec{u} + m\vec{u} + 2m\vec{v} = k\vec{u} - k\vec{v}$
- 123▲ Om en firkant $ABCD$ får du vite at det fins et tall k slik at $\overline{AB} = k \cdot \overline{CD}$. Du får også vite at det *ikke* fins et tall q som gjør at $\overline{BC} = q \cdot \overline{DA}$.
Hva slags firkant er $ABCD$? Grunngi svaret.
- * 124▲ På figuren ser du tre vektorer $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$.



- Ved å tegne disse vektorene nøyaktig på rutepapir skal du bestemme tallene k og m slik at $k \cdot \vec{u} = \vec{v} + m \cdot \vec{w}$.
 - Bestem k og m ved å tegne vektorene med et konstruksjonsprogram.
- 125▲ Figuren viser firkanten $OABC$, der P , Q , R og S er midtpunkter på sidene OA , AB , BC og CO .
Vi setter $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$ og $\overline{OC} = \vec{c}$.
Finn vektorene $\overline{PS}$, $\overline{AC}$ og $\overline{QR}$ uttrykt ved $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$.
Hva kan du si om linjestykkene PS , AC og QR ?



- 126▲ La M være midtpunktet på PR , og N midtpunktet på QS på figuren i oppgave 125. Finn $\overrightarrow{OM}$ og $\overrightarrow{ON}$ uttrykt ved $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$. Hva finner du?
- * 127▲ ABC er en vilkårlig trekant. Punktet P ligger på AC slik at AP er dobbelt så lang som PC . Q er et punkt på BC slik at CQ er dobbelt så lang som QB .
- Tegn figur.
 - Sett $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ og $\overrightarrow{CB} = \vec{v}$. Uttrykk $\overrightarrow{AP}$ og $\overrightarrow{PC}$ ved $\vec{u}$. Uttrykk også $\overrightarrow{CQ}$ ved $\vec{v}$.
 - Uttrykk vektoren $\overrightarrow{PQ}$ ved $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
Forlengelsen av PQ skjærer forlengelsen av AB i et punkt R .
 - Forklar at vi kan skrive $\overrightarrow{AR} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, der k er et reelt tall, og skriv $\overrightarrow{AR}$ uttrykt ved $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
 - Finn et uttrykk for $\overrightarrow{AR}$ ved å gå via P .
 - Bruk resultatene fra oppgave d og e til å finne k .

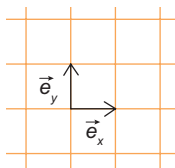
1.4 Vektorkoordinater

Sti 1	Sti 2	Sti 3
128, 130, 131, 134	129, 131, 133, 134, 136▲	133, 135▲, 136▲, 137▲

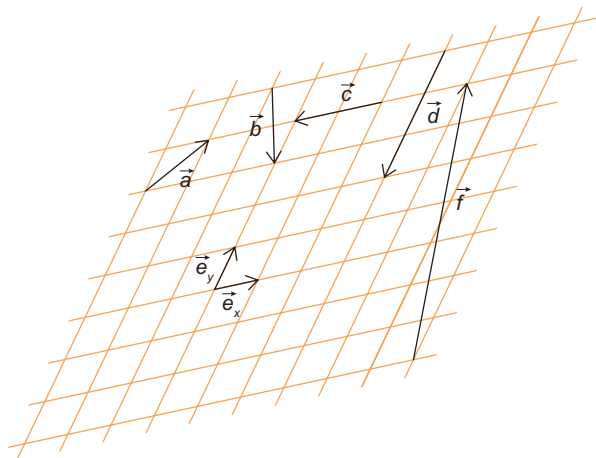


Petersplassen i Vatikanet i Roma, sett fra Vatikan-terrassen (over Peterskirken).

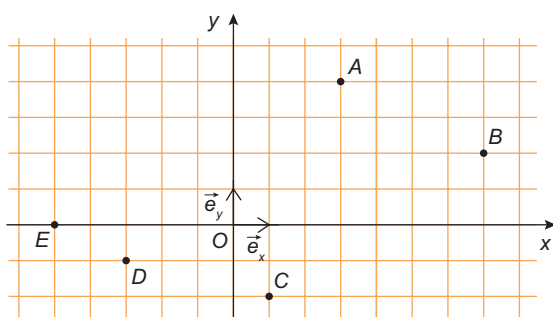
- 128 Tegn vektorene $2\vec{e}_x + 5\vec{e}_y$, $-4\vec{e}_x + \vec{e}_y$ og $-2\vec{e}_x - 3\vec{e}_y$.



- 129 Finn de andre vektorene uttrykt ved $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$.



- 130 Finn en posisjonsvektor til hvert av punktene.



- 131 Skriv vektorene enklere.

a $[4, 2] + [3, 1]$

b $[-1, 3] + [2, -2]$

c $[6, -2] - [1, -3]$

d $[-3, -2] - [-3, 2]$

e $[4, -2] + [-1, 0] - [3, -2]$

- 132 Skriv vektoren $\overrightarrow{PQ}$ uttrykt ved posisjonsvektorene til P og Q .

- 133 Om posisjonsvektorene til P og Q får vi vite at $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \vec{0}$.

Hva kan du si om koordinatene til P og Q ? Hvordan ligger punktene i forhold til hverandre i koordinatsystemet?

134 Vi har gitt punktene $P = (7, 5)$, $Q = (1, 3)$, $R = (-2, 4)$ og $S = (-3, -6)$.

Bestem vektorene

a $\overrightarrow{QP}$ **b** $\overrightarrow{PQ}$ **c** $\overrightarrow{QR}$ **d** $\overrightarrow{SR}$

135▲ Bruk informasjonen i vektorlikningene til å bestemme posisjonen til hvert av punktene A, B, C, D, E, F og G .

$$\overrightarrow{OA} = -12\vec{e}_x + 6,5\vec{e}_y$$

$$\overrightarrow{AB} = 6,5\vec{e}_x + 0,5\vec{e}_y$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 10\vec{e}_x - 2,5\vec{e}_y$$

$$\overrightarrow{OD} = \vec{e}_x + 5\vec{e}_y - \overrightarrow{OC}$$

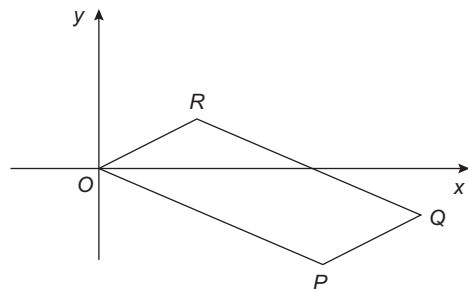
$$\overrightarrow{OE} = -\overrightarrow{OA} + 0,5\vec{e}_x + 7\vec{e}_y$$

$$\overrightarrow{BF} = 15\vec{e}_x - 13\vec{e}_y$$

$$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OG} = 5,5\vec{e}_y$$

Marker punktene i et koordinatsystem med en stjerne ★ (og en bokstav).

* 136▲ $OPQR$ er et parallelogram. Q og R har posisjonsvektorene $\overrightarrow{OQ} = 11\vec{e}_x - 3\vec{e}_y$ og $\overrightarrow{OR} = 4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$. Bestem koordinatene til P .



137▲ Gitt vektorene $\vec{u} = [-2, 3]$ og $\vec{v} = [-1, 1]$. Bestem a og b slik at

a $a\vec{u} + b\vec{v} = [-8, 11]$

b $a\vec{u} + b\vec{v} = [-2, 1]$

c $a\vec{u} + b\vec{v} - [1, 1] = \vec{0}$

d $a\vec{u} - b\vec{v} = 2\vec{u}$

e $2a\vec{u} - b\vec{v} = 2b\vec{u} + (a - 2)\vec{v}$

1.5 Lengden av vektorer

Sti 1	Sti 2	Sti 3
138, 140, 141, 143	138, 139, 142, 147▲, 149▲	142, 145, 146, 148▲, 149▲, 151▲

138 Bestem $|\vec{v}|$ når

a $\vec{v} = [5, -1]$

b $\vec{v} = [-40, 9]$

c $\vec{v} = [3t, -4t]$, der $t \geq 0$

139 Forsøk å rangere vektorene etter lengde *uten* å gjøre utregninger med digitalt verktøy.

$$\vec{a} = [12, 4], \quad \vec{b} = [10, 9], \quad \vec{c} = [7, 11], \quad \vec{d} = [13, 0]$$

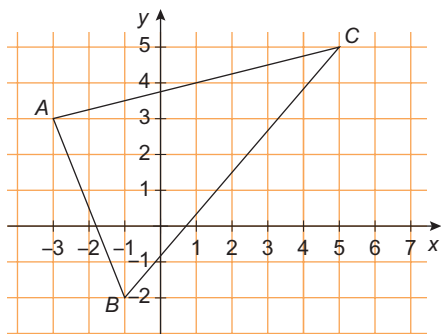
Kontroller rangeringen.

140 Vektoren $\vec{v} = [4, 3]$ har lengden 5. Skriv ned, uten å gjøre utregninger, andre vektorer som også har lengde 5. Klarer du 11?

141 Regn ut avstanden mellom P og Q når

- a $P = (2, 1)$ og $Q = (7, 8)$
- b $P = (-2, 0)$ og $Q = (3, 1)$
- c $P = (23, 4)$ og $Q = (-1, -3)$

142 Regn ut lengden av sidene i trekanten.



143 Vi har gitt vektoren $\vec{v} = [2, -8]$. Finn vektoren som

- a har samme retning som $\vec{v}$ og er 3 ganger så lang
- b har motsatt retning av $\vec{v}$ og er 5 ganger så lang
- c har motsatt retning av $\vec{v}$ og er halvparten så lang
- d har samme retning som $\vec{v}$ og er 25 % lengre

144 Gitt punktene $A = (0, 1)$, $B = (6, 4)$, $C = (4, 7)$ og $D = (0, 5)$. Avgjør om noen av sidene i firkanten $ABCD$ er parallelle. Hva slags firkant er $ABCD$?

145 En enhetsvektor er en vektor med lengde 1, slik som $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$.

Vis at $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ er en enhetsvektor som har samme retning som $\vec{v}$.

146 Se oppgave 145. Bestem enhetsvektoren i retningen

- a gitt ved $\vec{u} = [6, -8]$
- b gitt ved $\vec{v} = [-21, 20]$
- c fra P til Q når $P = (2, 5)$ og $Q = (-6, -10)$
- d fra A til B når $A = (12, 6)$ og $B = (6, -3)$

147▲ Bestem a slik at

- a $||[6, a]|| = 10$
- b $||[2a, a]|| = 15$
- c $||[a, a] - [2, 1]|| = 5$

- * 148▲ a Bestem a slik at avstanden mellom punktene $P = (a, a+1)$ og $Q = (2-a, 2a)$ blir minst mulig. (Hint: $|\overline{PQ}|$ har sin minste verdi når $|\overline{PQ}|^2$ har sin minste verdi. Bruk derivasjon.)
- b Bestem a slik at avstanden mellom punktene $R = (2-a, a)$ og $S = (2a, 3-a)$ blir minst mulig.

- 149▲ Virre går tur. Han starter hjemmefra (i origo) og går 111 m i retningen gitt ved vektoren $[12, 35]$. Deretter går han 130 m i retningen $[-16, 63]$. Til slutt går Virre 200 m i retningen $[-7, 24]$. Der stanser han.
a Finn Virres posisjon. **b** Hvor langt hjemmefra er Virre?
- * 150▲ Bestem a slik at firkanten $ABCD$ blir et trapes.
 $A = (-2, 1)$, $B = (1, -3)$, $C = (4, 2)$ og $D = (a, 5)$. Finner du mer enn én løsning?
- 151▲ En sirkel har radius 5 og sentrum i $S = (24, 7)$.
a Skriv ned posisjonsvektoren til S og finn lengden av denne vektoren.
b La P være det punktet på sirkelperiferien som er lengst unna origo. Forklar at P må ligge på linja gjennom origo O og S .
c Finn posisjonsvektoren til P .
d La Q være det punktet på sirkelperiferien som ligger nærmest origo. Finn koordinatene til Q .
e Løs oppgave c og d grafisk ved hjelp av et konstruksjonsprogram.

1.6 Skalarprodukt

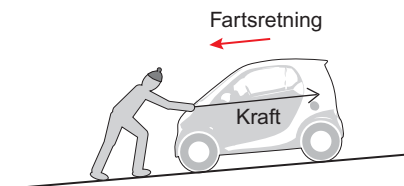
Sti 1	Sti 2	Sti 3
152, 154, 157, 158, 164▲, 166▲	153, 154, 156, 157, 158, 161, 165▲, 166▲	155, 159▲, 160, 162▲, 163▲, 166▲, 167▲, 169▲

- 152 Vinkelen mellom to vektorer er α .
a Hva er den minste verdien α kan ha? Hva kan du si om retningen til de to vektorene når α har denne verdien?
b Hva er den største verdien α kan ha? Hva kan du si om retningen til de to vektorene når α har denne verdien?
- 153 Vinkelen mellom to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er 30° .
a Hvor stor er vinkelen mellom $-\vec{u}$ og $-\vec{v}$?
b Hvor stor er vinkelen mellom $-\vec{u}$ og $\vec{v}$?
c Hvor stor er vinkelen mellom $\vec{u}$ og $-\vec{v}$?
- 154 Vinkelen mellom to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er 65° . Lengden av $\vec{u}$ er 4, og lengden av $\vec{v}$ er 9. Regn ut skalarproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- 155 Vi lar timeviseren og minuttviseren på en klokke være $\vec{u}$ og $\vec{v}$, med lengder 2 og 3.
a Hva er skalarproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v}$ når klokka viser 12.00?
b Hva er skalarproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v}$ når klokka viser 9.30?
c Finn et tidspunkt der $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.

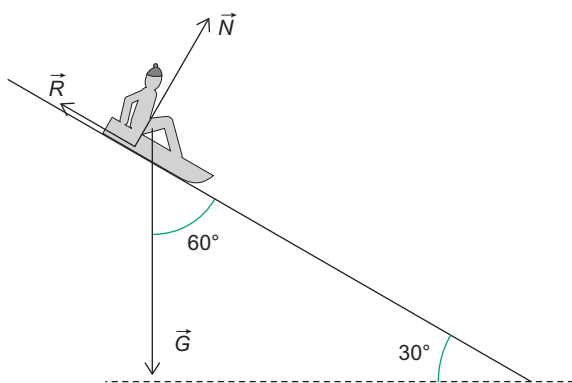
- * 156 Du får vite at skalarproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v} = 105$, $|\vec{u}| = 35$ og $|\vec{v}| = 3$. Hva kan du si om retningen til vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$?

- 157 Bestem vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ når $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$, $|\vec{u}| = 3$ og $|\vec{v}| = 10$.

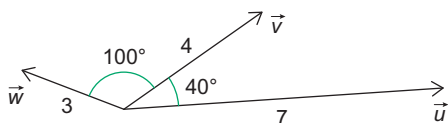
- 158 Andreas forsøker å holde igjen en førerløs bil som har begynt å rulle. Han dytter bilen med en kraft på 600 N. Bilen ruller likevel 40 m. Hvor stort arbeid utfører Andreas på bilen?



- 159▲ Willy aker kjelke ned en bratt bakke som er 70 m og danner vinkelen 30° med horisontalen. Figuren viser kreftene som virker på Willy og kjelken. $G = 800$ N, $N = 693$ N og $R = 250$ N. Kraften $\vec{N}$ danner 90° med bakken, og $\vec{R}$ er parallell med bakken. Finn arbeidet som hver av kreftene utfører når Willy kjører ned bakken.



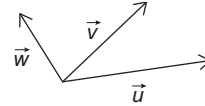
- 160 Bruk regneregler for skalarprodukt til å bestemme $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ når lengder og vinkler er slik figuren viser. Regn også ut $\vec{u} \cdot \vec{v}$ og $\vec{u} \cdot \vec{w}$.



- 161 a Forklar ut fra definisjonen $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$ at $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1$, og at $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$.
 b $(2\vec{e}_x - 3\vec{e}_y) \cdot (\vec{e}_x - 2\vec{e}_y)$
 c $(\vec{e}_x + \vec{e}_y) \cdot (\vec{e}_x - \vec{e}_y)$
 d $(-5\vec{e}_x - 3\vec{e}_y) \cdot (-3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y)$

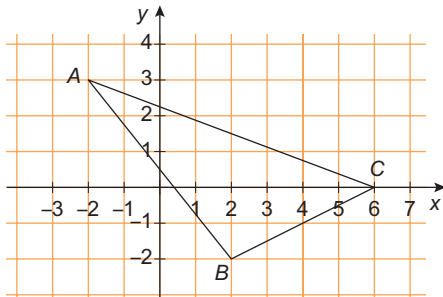
- 162▲ a Regn ut $\vec{v}^2$ når $\vec{v} = [-4, 3]$.
 b Bestem et uttrykk for $\vec{v}^2$ når $\vec{v} = [4, 1] + t \cdot [1, 0]$.
 Finn den verdien for t som gjør at $\vec{v}^2$ blir minst mulig.
 c Bestem et uttrykk for $\vec{v}^2$ når $\vec{v} = [-2, 3] + t \cdot [1, -1]$. Finn t slik at $|\vec{v}|$ blir 1.

- 163▲ a Regn ut $([2, 1] \cdot [1, 3]) \cdot [1, 1]$ og $[2, 1] \cdot ([1, 3] \cdot [1, 1])$. Blir svarene like?
 b Hva kan du si om retningen til vektoren $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$?
 Hva med retningen til $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$?
 Forklar at $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ ikke er det samme som $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$.



- 164▲ Finn vinkelen mellom vektorene $\vec{u} = [20, 21]$ og $\vec{v} = [-45, 28]$.

165▲



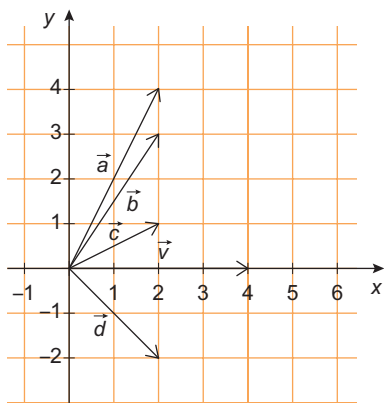
Bestem vinklene i trekanten ABC.

- 166▲ Bestem t slik at vektorene blir ortogonale.
 a $\vec{u} = [2, t]$ og $\vec{v} = [3, 8]$ b $\vec{u} = [t-1, t]$ og $\vec{v} = [4, -1]$
 c $\vec{u} = [6+t, t]$ og $\vec{v} = [-1, t]$ d $\vec{u} = [2, -1] + t[4, 1]$ og $\vec{v} = [2, 1]$
 e Løs oppgave a og d grafisk ved hjelp av et konstruksjonsprogram.
- 167▲ Vi har gitt tre punkter $P = (4, 2)$, $Q = (9, 5)$ og $R = (4, 5)$.
 a Regn ut skalarproduktet
 1 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ 2 $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}$ 3 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}$
 b Er trekant PQR rettvinklet?
- * 168▲ En sirkel har sentrum i $S = (6, -1)$. Vis at tangenten til sirkelen i punktet $P = (2, \frac{1}{2})$ er parallell med vektoren $[3, 8]$.
- 169▲ a Bestem lengden av vektorene $\vec{u} = [24, 7]$ og $\vec{v} = [8, 15]$, og vinkelen mellom dem.
 b Finn vektoren $\vec{w} = |\vec{u}|\vec{v} + |\vec{v}|\vec{u}$.
 c Vis at vektoren $\vec{w}$ halverer vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
 d Bruk et konstruksjonsprogram til å vise at $|\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{a}$ halverer vinkelen mellom to vilkårlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

1.7 Skalarprodukt og geometriske problemer

Sti 1	Sti 2	Sti 3
170▲, 171▲	170▲, 171▲, 172▲▲	171▲, 172▲▲, 173▲▲

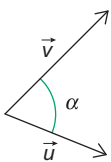
170▲ a Regn ut skalarproduktene $\vec{v} \cdot \vec{a}$, $\vec{v} \cdot \vec{b}$, $\vec{v} \cdot \vec{c}$ og $\vec{v} \cdot \vec{d}$. Hva finner du?



b Forklar resultatet i oppgave a ved å ta utgangspunkt i definisjonen på skalarprodukt.

171▲ Mellom A og B går det en rett vei. Fra C skal kommunen lage en vei som gir forbindelse med veien AB . Hvor skal denne veien treffe AB for at den skal bli kortest mulig når $A = (1, 2)$, $B = (4, 8)$ og $C = (5, 4)$?

*** 172▲▲** Vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ har lengdene 2 og 3. Bestem vinkelen α slik at vektorene $\vec{u} + \vec{v}$ og $2\vec{u} - \vec{v}$ står vinkelrett på hverandre.



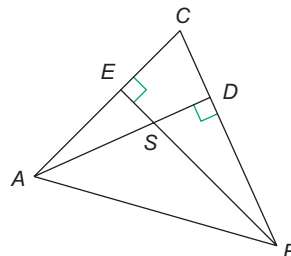
*** 173▲▲** I trekant ABC står AD vinkelrett på BC , og BE vinkelrett på AC . S er skjæringspunktet mellom AD og BE . Sett $\vec{SA} = \vec{a}$, $\vec{SB} = \vec{b}$ og $\vec{SC} = \vec{c}$.

a Finn $\vec{AC}$ og $\vec{BC}$ uttrykt ved $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$.

b Hva blir skalarproduktene $\vec{a} \cdot \vec{BC}$ og $\vec{b} \cdot \vec{AC}$?

c Vis at $\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b}$. (Hint: Bruk resultatet i oppgave a til å sette inn et uttrykk for $\vec{c}$.)

d Vis at $\vec{c}$ står vinkelrett på $\vec{AB}$. Hva sier resultatet om høydene i trekanten?

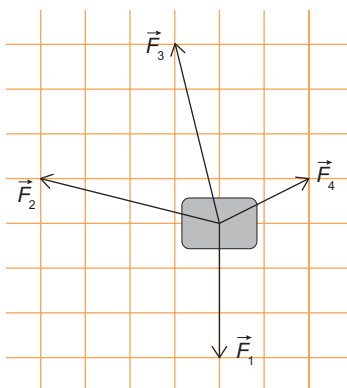


15 rette eller gale

- 1 Summen av to vektorer har alltid en lengde som er lik lengden av den ene vektoren pluss lengden av den andre.
- 2 Hvis differansen mellom to vektorer er nullvektoren, har de to vektorene samme lengde.
- 3 For en vektor $\vec{v}$ med lengde 7 kan vi skrive $\vec{v} = 7$.
- 4 Motsatte vektorer er parallelle.
- 5 Det fins to ikke-parallelle vektorer som gir nullvektor når vi adderer dem.
- 6 Når vi multipliserer en vektor $\vec{v}$ med en skalar, får vi alltid en vektor som har samme retning som $\vec{v}$.
- 7 Når vi subtraherer $\overrightarrow{AB}$ fra $\overrightarrow{AC}$, får vi $\overrightarrow{BC}$.
- 8 Skalarproduktet av to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er en vektor som ikke er parallell med $\vec{u}$ eller $\vec{v}$.
- 9 Skalarproduktet av to parallelle vektorer er alltid null.
- 10 Skalarproduktet av $2\vec{u}$ og $3\vec{v}$ er lik $6\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- 11 Når vi adderer to vektorer, adderer vi x -komponentene for seg og y -komponentene for seg.
- 12 Hvis $\overrightarrow{AB} = [3, 2]$, så er $\overrightarrow{BA} = [-3, 2]$.
- 13 Vektoren $[1, -2]$ står vinkelrett på $[4, 2]$.
- 14 ABC er en likesidet trekant der sidene har lengde 2. Da er skalarproduktet $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$.
- 15 Hvis $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, må vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ha samme retning.

Blandede oppgaver

- *174 Figuren viser en gjenstand som er påvirket av fire krefter.



- a Tegn kraftsummen som virker på gjenstanden, dvs. $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$.
 - b Bestem størrelsen av kraftsummen. Siden i en rute svarer til én newton.
 - c Finn den vinkelen kraftsummen danner med $\vec{F}_1$.
- 175 En rett linje har stigningstallet 0,75. Finn en vektor som er parallell med linja. Bestem to enhetsvektorer som er parallelle med linja.

176 Vi har gitt punktene $A = (4, 7)$, $B = (14, -3)$ og $C = (t + 1, t)$.

- a Bestem t slik at A , B og C blir liggende på en rett linje.
- b Bestem t slik at vinkel ACB blir 90° .

* 177 I trekant ABC er D fotpunktet til høyden på AB .

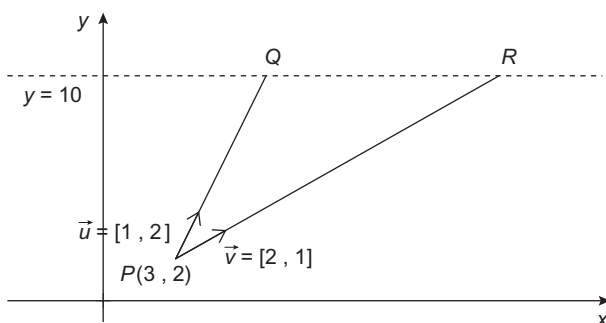
$A = (0, 0)$, $B = (12, 3)$ og $C = (2, 9)$.

- a La $\vec{v}$ være enhetsvektoren fra A mot B . Finn $\vec{v}$.
- b Bruk definisjonen $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$ til å vise at $|\overrightarrow{AD}| = \overrightarrow{AC} \cdot \vec{v}$.
- c Finn punktet D .

178 Sabina er ute og padler. Hun skal til et sted som er 15 km lenger øst og 9 km lenger nord. Hun holder konstant fart gitt ved vektoren $\vec{v} = [4, 2]$ i tre timer. $|\vec{v}|$ er antall km per time.

- a Finn vektoren som viser den gjenstående etappen av Sabinas padletur.
- b Hvor mye må Sabina endre kursen for at hun skal padle rett mot målet?
- c Sabina håper å gjøre unna hele padleturen på fire timer. Må hun øke farten?

179 Punktet P har koordinatene $(3, 2)$. Punktene Q og R ligger på den vannrette linja $y = 10$. Vektoren $\vec{u} = [1, 2]$ har samme retning som $\overrightarrow{PQ}$, og $\vec{v} = [2, 1]$ har samme retning som $\overrightarrow{PR}$.

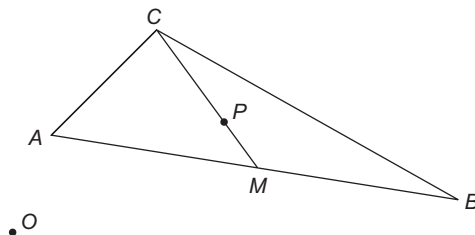


- a Bestem $\overrightarrow{QR}$ ved regning.
- b Bestem $\overrightarrow{QR}$ grafisk med et konstruksjonsprogram.

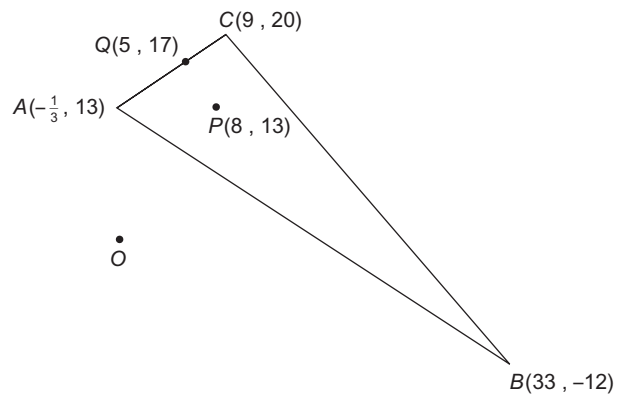
180 Vinkelen mellom to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{r}$ er mindre enn 90° . Vektoren $\vec{w}$ er gitt ved $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, der $\vec{u} \parallel \vec{r}$ og $\vec{v} \perp \vec{r}$. Bestem verdien av $\vec{w} \cdot \vec{r}$ når $|\vec{u}| = 4$ og $|\vec{r}| = 3$.

181 I trekanten ABC er M midtpunktet på AB . La $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ være posisjonsvektorer til A , B og C .

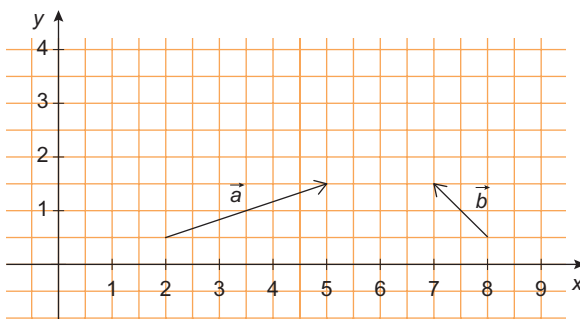
- a Skriv vektoren $\overrightarrow{OM}$ uttrykt ved $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
- b Punktet P ligger på CM slik at $CP = 2PM$. Finn $\overrightarrow{OP}$ uttrykt ved $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$.
- c La N være midtpunktet på AC . Punktet Q skal ligge på BN slik at $BQ = 2QN$. Vis at $P = Q$.



- 182** I trekanten ABC er $A = (-\frac{1}{3}, 13)$, $B = (33, -12)$ og $C = (9, 20)$.
- Vis at punktet $Q = (5, 17)$ ligger på linjestykket AC .
 - Punktet P har koordinater $(8, 13)$. Vis at Q er det punktet på AC som ligger nærmest P .
 - Finn avstanden fra P til BC .
 - Vis at en sirkel med sentrum i P og radius 5 tangerer de tre sidene i trekant ABC .
 - Bruk et konstruksjonsprogram til å løse oppgaven grafisk.



- X1.1**
- Bestem b slik at vektoren $\vec{v} = [-4, b]$ står vinkelrett på $\vec{u} = [3, 5]$.
 - Bestem b slik at vektoren $\vec{v} = [3b, b^2]$ er parallell med $\vec{u} = [3, 5]$.
- (Eksamen 2MX høsten 2003, utdrag)
- X1.2** Punktet $A(2, 1)$ er et hjørne i trekant ABC . De to andre hjørnene har koordinatene $B(5, 0)$ og $C(4, \frac{11}{3})$.
- Forklar at $\overline{AB} = [3, -1]$. Finn lengden av $\overline{AB}$.
 - Bruk skalarproduktet til å finne vinkelen mellom $\overline{AB}$ og $\overline{AC}$.
 - Vis at $D(3, \frac{2}{3})$ ligger på AB , og at $\overline{DC} \perp \overline{AB}$.
- (Eksamen 2MX høsten 2003, utdrag)
- X1.3** Vi har gitt punktet $A(2, -1)$. Punktene B og C er bestemt ved at $\overline{AB} = [4, 3]$ og $\overline{BC} = [-7, 1]$.
- Tegn punktene A , B og C i et koordinatsystem. Hva blir koordinatene til B og C ?
 - Undersøk om $\triangle ABC$ er rettvinklet.
 - Finn ved regning koordinatene til et punkt D slik at $ABCD$ blir et parallelogram.
- (Eksamen 2MX høsten 2004, utdrag)
- X1.4** Vi har gitt vektorene $\vec{a} = [3, 4]$, $\vec{b} = [-8, 6]$ og $\vec{c} = [2, 11]$.
- Finn $\vec{a} + \vec{b}$ og $2\vec{a} - \vec{b}$ ved regning. Kontroller svarene ved tegning.
 - Undersøk om $\vec{a} \perp \vec{b}$.
 - Finn ved regning to tall k og t , slik at $\vec{c} = k \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$.
 - Gi en geometrisk forklaring på det du fant i oppgave c.
- (Eksamen 2MX høsten 2006)
- X1.5** Vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er gitt på figuren nedenfor.

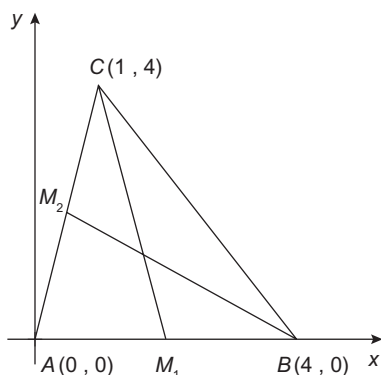


- a Tegn vektorene inn på svararket ditt. Tegn også vektorene $\vec{a} + \vec{b}$ og $2\vec{a} - \vec{b}$ på det samme arket.
 - b Vektorene på figuren er tegnet i et koordinatsystem. Forklar at koordinatene til $\vec{a}$ er lik $[3, 1]$. Finn koordinatene til $\vec{b}$.
 - c Regn ut $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Forklar hvordan du ut fra svaret kan avgjøre om $\vec{a} \perp \vec{b}$.
- (Eksamen 2MX våren 2004, utdrag)

X1.6 Vi har gitt punktene $A(-2, 1)$, $B(2, 3)$ og $C(1, 5)$.

- a Finn $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ og $|\overline{AB}|$.
 - b Undersøk ved regning om $\overline{AB}$ står vinkelrett på $\overline{BC}$.
 - c Undersøk ved regning om punktet $D(-1, 3)$ ligger på linja gjennom A og C.
 - d Linja gjennom A og C skjærer y-aksen i punktet E. Finn ved regning koordinatene til E.
 - e Punktet F ligger på x-aksen. Finn koordinatene til F slik at avstanden fra F til B er 5.
- (Eksamen 2MX våren 2005)

X1.7 En trekant ABC er plassert i et koordinatsystem som vist på figuren.



- a Skriv koordinatene til $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ og $\overline{BC}$.
- M_1 er midtpunktet på siden AB, og M_2 er midtpunktet på AC.
- b Vis ved regning at koordinatene til M_1 er $(2, 0)$, og til punktet M_2 er $(\frac{1}{2}, 2)$. Vi kaller skjæringspunktet mellom CM_1 og BM_2 for S.
- En metode for å finne koordinatene til S består i å skrive $\overline{CS}$ på to måter. To ulike veier fra C til S gir
- $$\overline{CS} = k \cdot \overline{CM_1} \text{ og } \overline{CS} = \overline{CB} + t \cdot \overline{BM_2}$$
- Dette gir følgende vektorlikning:
- $$k \cdot \overline{CM_1} = \overline{CB} + t \cdot \overline{BM_2}$$
- c Sett inn koordinatene til $\overline{CM_1}$, $\overline{CB}$ og $\overline{BM_2}$, og vis at vektorlikningen kan skrives som $[k, -4k] = [3 - \frac{7}{2}t, -4 + 2t]$.
 - d Løs vektorlikningen, og vis at $k = \frac{2}{3}$ og $t = \frac{2}{3}$.
 - e Bestem $\overline{CS}$ og koordinatene til punktet S.
- M_3 er midtpunktet på BC.
- f Undersøk om AM_3 går gjennom punktet S.

(Eksamen 2MX våren 2006)

Fasit

Innlæringsoppgaver og kapitteltester

1.1 c, e, f og g

1.2 a $\overline{ED}$ b $\overline{EF}$ c $\overline{DF}$ d $\overline{EB}$, $\overline{AD}$, $\overline{DA}$, $\overline{FC}$ og $\overline{CF}$

1.3 a $\vec{a}$ og $\vec{e}$ $\vec{b}$ og $\vec{d}$ $\vec{f}$ og $\vec{g}$ b $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ og $\vec{g}$ $\vec{c}$ og $\vec{f}$ c $\vec{b} = \vec{d}$

1.5 a $\overline{AE}$ b $\overline{AH}$ c $\overline{AB}$ d $\overline{AD}$

1.7 a F.eks. $\overline{BA}$ b F.eks. $\overline{IB}$ c $\overline{CG}$

1.9 $\vec{u} = \vec{w} + \vec{v}$ $\vec{v} = \vec{u} - \vec{w}$ $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$

1.10 a $\overline{BC}$ b $\overline{AD}$ c $\overline{AB}$ d $\overline{BA}$

1.12 $\vec{a} = 3\vec{v}$ $\vec{b} = 6\vec{v}$ $\vec{c} = -\vec{v}$ $\vec{d} = -4\vec{v}$

1.13 a $5\vec{u} + 3\vec{v}$ b $2\vec{u} - 7\vec{v}$ c $\vec{u} - 2\vec{v}$

1.14 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ $\vec{c} \parallel \vec{d}$

1.15 a $k = m = 3$ b $k = m = 2$

1.17 a $\overline{BD} = \vec{v} - \vec{u}$ $\overline{AQ} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$

b $\overline{AP} = \frac{1}{2}k\vec{u} + k\vec{v} = (1-m)\vec{u} + m\vec{v}$ c $k = m = \frac{2}{3}$ gir $\overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AQ}$

1.19 $\vec{a} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y$ $\vec{b} = 4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$ $\vec{c} = 3\vec{e}_y$ $\vec{d} = 2\vec{e}_x - 3\vec{e}_y$ $\vec{e} = -2\vec{e}_x$ $\vec{f} = -4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y$

1.20 $\vec{a} = [1, 1]$ $\vec{b} = [1, 2]$ $\vec{c} = [1, 0]$ $\vec{d} = [1, -3]$ $\vec{e} = [-4, -5]$ $\vec{f} = [-3, 0]$

1.21 $(-1, -3)$

1.22 a $[2, 6]$ b $[12, 8]$ c $[4, -7]$ d $[9, 12]$

1.23 a $[2, 3]$ b $[-5, -1]$ c $[3, -2]$

1.24 a 10 b 5,1 c 13

1.25 a 5 b 7,2 c 41

1.26 a Ja b Ja c Nei

1.27 a $a = \frac{45}{4}$ b $a = \frac{13}{3}$ c $a = 0$

1.28 a Ja b Nei

1.29 a 43° b 155° c 123° d 129°

1.30 a 28,3 b -34,6 c 0

1.31 $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = \vec{u} \cdot \vec{v}_2 = \vec{u} \cdot \vec{v}_3 = 19 \text{ cm}^2$

1.32 a 4 48 b 6 48

1.33 $507 \text{ J} \approx 0,51 \text{ kJ}$

1.35 a 0 b 1 c 1 d 0 e 24 f -12

1.36 a 17 b 0 c 0 d 1

- 1.37 a Ja (skalarproduktet er 0) b Nei (skalarproduktet er 2)
 c Nei (skalarproduktet er -21) d Ja (skalarproduktet er 0)
- 1.38 a $k = -5$ b $k = 1$ c $k = 3$ d $k = -2$ eller $k = 3$
- 1.39 a Feks. $[1, -5]$ b Feks. $[2, 3]$ c Feks. $[8, 7]$
- 1.40 a $0 \quad 90^\circ$ b $5 \quad 45^\circ$ c $-435 \quad 144,7^\circ$ d $-8 \quad 153,4^\circ$
- 1.41 a $\angle A = 31,0^\circ$ $\angle B = 40,6^\circ$ $\angle C = 108,4^\circ$
 b $\angle A = 39,1^\circ$ $\angle B = 20,9^\circ$ $\angle C = 120,0^\circ$
- 1.43 a $3,6$ b $9,0$
- 1.B $\vec{a} \parallel \vec{b}$ $\vec{c} \parallel \vec{d}$
- 1.C a $p = -3$ b $p = 2$ og $q = -3$ c $p = \pm\sqrt{2}$ og $q = 1$
- 1.D a $[5, -1]$ b $[-3, 2]$ c $[0, 0]$
- 1.E $B = (3, -2)$ $C = (5, 4)$ $D = (0, 1)$
- 1.F $t = -2$ eller $t = \frac{12}{5}$
- 1.G a 0 Diagonalene står normalt på hverandre. b $\angle A = \angle C = 16,3^\circ$ $\angle B = \angle D = 163,7^\circ$
 c Rombe
- 1.H 0
- 1.I a Ja ($\angle A = 90^\circ$) b $4,5$
-
- 2.1 a $6a(9a+1)$ b $5a(4ab-1)$ c $7a(3a-1)$ d $-3ab(b+4)$
- 2.2 a $(x+9)(x-9)$ b $(6+a)(6-a)$ c $5(x+3)(x-3)$ d $3(7+x)(7-x)$
- 2.3 a $(a+2)^2$ b $(x-4)^2$ c $(11-a)^2$ d $(12+b)^2$
- 2.4 a $\frac{x+11}{2}$ b $\frac{3x+15}{x-5}$
- 2.5 a $(x-2)(x-4)$ b $3(x+2)(x-1)$ c $-(2x-1)(x-1)$
- 2.6 a $(2x-3)^2$ b $-\frac{1}{3}(x-3)^2$ c Kan ikke faktoriseres d $x(x+1)(x-3)$
- 2.7 a $\frac{x+2}{x-1}$ b $\frac{3x-2}{x+1}$ c $\frac{x-1}{x}$
- 2.8 a $\frac{2}{x-2}$ b $-\frac{2}{x+5}$
- 2.9 a $3x+1$ $(2x-4)(3x+1)$ b $8x^2-3x+3$ $(x+1)(8x^2-3x+3)$ c $3x^2-2$ $(x-2)(3x^2-2)$
- 2.10 a $x^2+x+2+\frac{5}{x-2}$ b $x^2-2-\frac{12}{x^2+2}$
- 2.11 a Ja b Nei c Nei d Ja e Nei f Ja
- 2.12 a 0 $(x-1)(x+1)(x-2)$ b 0 $(x-1)(x+2)(x-3)$
 c 0 $-(x-1)(x+1)(x+2)$ d 0 $-(x-1)(x+5)(x-2)$
- 2.13 1 og 2 $x = 1$ eller $x = 2$ eller $x = 3$

Fasit

Oppgavesamling

100 b

101 Vektorer: b, c Skalarer: a, d

103 a $|\vec{v}| = |\vec{w}|$ b $|\vec{u}| = |\vec{w}|$ og $|\vec{t}| = |\vec{v}|$ $\vec{u} \parallel \vec{w}$ og $\vec{t} \parallel \vec{v}$ $\vec{t} = \vec{v}$

c $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}|$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$

104 a $\overline{BE}$ og $\overline{CD}$ b $\overline{BA}$, $\overline{DE}$ og $\overline{EF}$

105 a Nei b Ja c Nei d Ja

107 a $\overline{DB}$ b $\vec{0}$ c $\overline{AC}$ d $\overline{DB}$

109 $4|\vec{v}|$ $2|\vec{v}|$

110 a $\vec{u} + \vec{v}$ b $-\vec{v}$ c $\vec{u} - \vec{v}$ d $-\vec{u} - \vec{v}$

112 a $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ $\vec{v} = \vec{u} - \vec{w}$ $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$

b $\vec{p} = -\vec{q} + \vec{r} + \vec{s}$ $\vec{q} = \vec{r} + \vec{s} - \vec{p}$ $\vec{r} = \vec{q} + \vec{p} - \vec{s}$ $\vec{s} = -\vec{r} + \vec{q} + \vec{p}$

117 a $\vec{u} = 2\vec{v}$ b $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$ c $\vec{u} = -3\vec{v}$ d $\vec{u} = -1,50\vec{v}$

118 $\vec{a} = 2\vec{u}$ $\vec{b} = -3\vec{v}$ $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{u}$ $\vec{d} = \vec{u} + \vec{v}$ $\vec{e} = \vec{u} - \vec{v}$ $\vec{f} = -\vec{u} - 4\vec{v}$

119 a $\vec{u} \parallel \vec{v}$ b $k > 0$ c $k = -1$ eller $k = 1$ d $|k| > 1$ (altså $k < -1$ eller $k > 1$)

120 a 12 Samme retning b 2 Motsatt retning

121 $3\vec{u} - 2\vec{v}$, $6\vec{u} - 4\vec{v}$ og $-3\vec{u} + 2\vec{v}$ $3\vec{v} - 2\vec{u}$ og $6\vec{u} - 9\vec{v}$

122 a $k = -\frac{1}{3}$ b $k = -1$ c $k = -2$ og $m = \frac{1}{3}$ d $k = 2$ og $m = -1$

123 Trapes

124 a $k = m = 5$

125 $\overline{PS} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a})$ $\overline{AC} = \vec{c} - \vec{a}$ $\overline{QR} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a})$ $PS = QR = \frac{1}{2}AC$

126 $\overline{OM} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{c})$ $\overline{ON} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{c}) + \frac{1}{2}\vec{b}$ $MN = \frac{1}{2}\vec{OB}$

127 b $\overline{AP} = \frac{2}{3}\vec{u}$ $\overline{PC} = \frac{1}{3}\vec{u}$ $\overline{CQ} = \frac{2}{3}\vec{v}$ c $\overline{PQ} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$ d $\overline{AR} = k\vec{u} + k\vec{v}$

e $\overline{AR} = \overline{AP} + m \cdot \overline{PQ} = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}m\vec{u} + \frac{2}{3}m\vec{v}$ f $k = \frac{4}{3}$

129 $\vec{a} = \vec{e}_x + \vec{e}_y$ $\vec{b} = \vec{e}_x - 2\vec{e}_y$ $\vec{c} = -2\vec{e}_x$ $\vec{d} = -3\vec{e}_y$ $\vec{f} = -2\vec{e}_x + 7\vec{e}_y$

130 $\overline{OA} = 3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y$ $\overline{OB} = 7\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$ $\overline{OC} = \vec{e}_x - 2\vec{e}_y$ $\overline{OD} = -3\vec{e}_x - \vec{e}_y$ $\overline{OE} = -5\vec{e}_x$

131 a $[7, 3]$ b $[1, 1]$ c $[5, 1]$ d $[0, -4]$ e $[0, 0]$

132 $\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}$

133 x-koordinatene har motsatt fortegn, og y-koordinatene har motsatt fortegn. Symmetrisk om origo

134 a $[6, 2]$ b $[-6, -2]$ c $[-3, 1]$ d $[1, 10]$

135 $A = (-12, 6, 5)$ $B = (-5, 5, 7)$ $C = (-2, 4)$ $D = (3, 1)$

$E = (12, 5, 0, 5)$ $F = (9, 5, -6)$ $G = (3, -4, 5)$

136 $P = (7, -6)$

137 **a** $a = 3$ og $b = 2$ **b** $a = -1$ og $b = 4$ **c** $a = 2$ og $b = -5$
d $a = 2$ og $b = 0$ **e** $a = b = 1$

138 **a** 5,1 **b** 41 **c** $5t$

139 $|\vec{a}| < |\vec{d}| < |\vec{c}| < |\vec{b}|$

140 $[5, 0], [3, 4], [0, 5], [-3, 4], [4, 3], [-5, 0], [-4, -3], [-3, -4], [0, -5], [3, -4], [4, -3]$

141 **a** 8,6 **b** 5,1 **c** 25

142 $AB = 5,4$ $BC = 9,2$ $AC = 8,2$

143 **a** $[6, -24]$ **b** $[-10, 40]$ **c** $[-1, 4]$ **d** $[2,5, -10]$

144 $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ Trapez

146 **a** $\left[\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right]$ **b** $\left[-\frac{21}{29}, \frac{20}{29}\right]$ **c** $\left[-\frac{8}{17}, -\frac{15}{17}\right]$ **d** $[-0,555, -0,832]$

147 **a** $a = -8$ eller $a = 8$ **b** $a = -6,71$ eller $a = 6,71$ **c** $a = -2$ eller $a = 5$

148 **a** $a = 1$ **b** $a = \frac{12}{13}$

149 **a** $(-52, 423)$ **b** 426 meter

150 $a = \frac{2}{5}$ eller $a = \frac{7}{4}$

151 **a** $[24, 7]$ 25 **c** $[28,8, 8,4]$ **d** $(19,2, 5,6)$

152 **a** 0° Samme retning **b** 180° Motsatt retning

153 **a** 30° **b** 150° **c** 150°

154 15,2

155 **a** 6 **b** -1,55 **c** Eks. kl. 6.00

156 Samme retning

157 $78,5^\circ$

158 -24 kJ

159 $G: 28 \text{ kJ}$ $N: 0 \text{ J}$ $R: -17,5 \text{ kJ}$

160 5,4 21,4 -16,1

161 **b** 8 **c** 0 **d** 3

162 **a** 25 **b** $t^2 + 8t + 17$ $t = -4$ **c** $2t^2 - 10t + 13$ $t = 2$ eller $t = 3$

163 **a** $[5, 5]$ $[8, 4]$ **b** Parallell med $\vec{w}$ Parallell med $\vec{u}$

164 $101,7^\circ$

165 $\angle A = 30,8^\circ$ $\angle B = 102,1^\circ$ $\angle C = 47,1^\circ$

166 **a** $t = -\frac{3}{4}$ **b** $t = \frac{4}{3}$ **c** $t = -2$ eller $t = 3$ **d** $t = -\frac{1}{3}$

167 **a** 1 9 **2** 25 **3** 0 **b** Ja ($\angle R = 90^\circ$)

169 **a** 25 17 $45,7^\circ$ **b** $[608, 494]$

170 **a** Alle er lik 8.

171 I punktet $\left(\frac{13}{5}, \frac{26}{5}\right)$

172 $80,4^\circ$

$$173 \quad \mathbf{a} \quad \overline{AC} = \vec{c} - \vec{a} \quad \overline{BC} = \vec{c} - \vec{b} \quad \mathbf{b} \quad 0$$

$\mathbf{d}$ De tre høydene i trekanten skjærer hverandre i samme punkt.

$$174 \quad \mathbf{b} \quad 4,24 \text{ N} \quad \mathbf{c} \quad 135^\circ$$

$$175 \quad \text{F.eks. } [1, 0,75] \quad [0,8, 0,6] \text{ og } [-0,8, -0,6]$$

$$176 \quad \mathbf{a} \quad t = 5 \quad \mathbf{b} \quad t = 1 \text{ eller } t = 9$$

$$177 \quad \mathbf{a} \quad [0,970, 0,243] \quad \mathbf{c} \quad (4, 1)$$

$$178 \quad \mathbf{a} \quad [3, 3] \quad \mathbf{b} \quad 18,4^\circ \text{ mot venstre} \quad \mathbf{c} \quad \text{Nei}$$

$$179 \quad \mathbf{a} \quad [12, 0]$$

$$180 \quad 12$$

$$181 \quad \mathbf{a} \quad \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \quad \mathbf{b} \quad \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$182 \quad \mathbf{c} \quad 5$$

$$\mathbf{X1.1} \quad \mathbf{a} \quad b = \frac{12}{5} \quad \mathbf{b} \quad b = 0 \text{ eller } b = 5$$

$$\mathbf{X1.2} \quad \mathbf{a} \quad 3,16 \quad \mathbf{b} \quad 71,6^\circ$$

$$\mathbf{X1.3} \quad \mathbf{a} \quad B = (6, 2) \quad C = (-1, 3) \quad \mathbf{b} \quad \text{Ja } (\angle A = 90^\circ) \quad \mathbf{c} \quad (-5, 0)$$

$$\mathbf{X1.4} \quad \mathbf{a} \quad [-5, 10] \quad [14, 2] \quad \mathbf{b} \quad \text{Ja} \quad \mathbf{c} \quad k = 2 \text{ og } t = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{X1.5} \quad \mathbf{b} \quad [-1, 1] \quad \mathbf{c} \quad -2 \quad \vec{a} \text{ og } \vec{b} \text{ er ikke ortogonale, siden } \vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0.$$

$$\mathbf{X1.6} \quad \mathbf{a} \quad [4, 2] \quad [3, 4] \quad 4,47 \quad \mathbf{b} \quad \text{Ja} \quad \mathbf{c} \quad \text{Nei} \quad \mathbf{d} \quad \left(0, \frac{11}{3}\right) \quad \mathbf{e} \quad (-2, 0) \text{ eller } (6, 0)$$

$$\mathbf{X1.7} \quad \mathbf{a} \quad [4, 0] \quad [1, 4] \quad [-3, 4] \quad \mathbf{e} \quad \left[\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}\right] \quad \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad \mathbf{f} \quad \text{Ja}$$

$$200 \quad \mathbf{a} \quad (x+3)(x-3) \quad \mathbf{b} \quad (9+t)(9-t) \quad \mathbf{c} \quad (5x+1)(5x-1)$$

$$201 \quad \mathbf{a} \quad 2(x+6)(x-6) \quad \mathbf{b} \quad 3(10+y)(10-y) \quad \mathbf{c} \quad 2x(x+5)(x-5)$$

$$202 \quad \mathbf{a} \quad 3+x \quad \mathbf{b} \quad \frac{x-1}{3} \quad \mathbf{c} \quad \frac{1}{2x+1} \quad \mathbf{d} \quad \frac{1}{4+3x} \quad \mathbf{e} \quad 6+2x \quad \mathbf{f} \quad -\frac{x+5}{2}$$

$$203 \quad \mathbf{a} \quad (x+1)(x-5) \quad \mathbf{b} \quad (x+1)(x+5) \quad \mathbf{c} \quad 2(x-1)(x-5) \quad \mathbf{d} \quad 2(2x+1)(x-1) \\ \mathbf{e} \quad -(x-3)(x-5) \quad \mathbf{f} \quad -3(x+2)(x-3) \quad \mathbf{g} \quad -(x+1)(2x-3)$$

$$204 \quad \mathbf{a} \quad (x-2)(x-3) \quad \mathbf{b} \quad x-3$$

$$205 \quad \mathbf{a} \quad (x-3)^2 \quad \mathbf{b} \quad (x+4)^2 \quad \mathbf{c} \quad (3+2x)^2 \quad \mathbf{d} \quad (3a-2b)^2 \quad \mathbf{e} \quad (x^2+1)^2$$

$$206 \quad \mathbf{a} \quad \frac{x+3}{x-5} \quad \mathbf{b} \quad \frac{x-4}{2x-1} \quad \mathbf{c} \quad x+2$$

$$207 \quad \mathbf{a} \quad \frac{-x^2+2x+12}{x^2-9} \quad \mathbf{b} \quad \frac{2x-6}{5x^2-20} \quad \mathbf{c} \quad \frac{3}{x^2-9} \quad \mathbf{d} \quad \frac{3-5x}{3-12x^2}$$

$$208 \quad \mathbf{a} \quad 1 \quad (x-1)(x+2) \quad 2 \quad \frac{8}{x+2} \quad \mathbf{b} \quad \frac{1}{x+2}$$

$$209 \quad \mathbf{a} \quad 3x+4 \quad \mathbf{b} \quad 4x+7 \quad \mathbf{c} \quad x+1-\frac{4}{x-2} \quad \mathbf{d} \quad 2x^2-3x+5$$

$$210 \quad \mathbf{a} \quad \text{Nei} \quad \mathbf{b} \quad \text{Nei} \quad \mathbf{c} \quad \text{Ja} \quad x^2-4x-2 \quad \mathbf{d} \quad \text{Nei}$$

$$211 \quad \mathbf{a} \quad \text{Ja, } f(1) = 0 \quad x^2+3x+2 \quad \mathbf{b} \quad \text{Nei, } f(2) \neq 0 \quad \mathbf{c} \quad \text{Ja, } f(-\frac{1}{3}) = 0 \quad x^2+2x-\frac{11}{3} \\ \mathbf{d} \quad \text{Ja, } f(a) = 0 \quad x+a$$